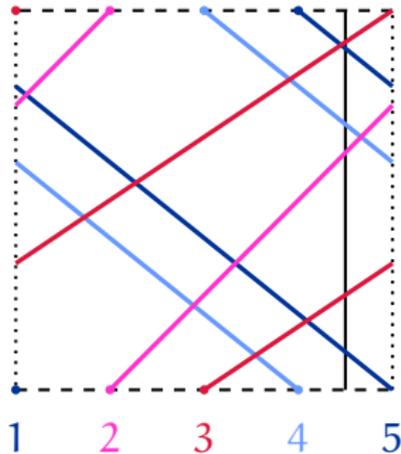


Dessiner des tresses pour comprendre des réseaux d'information

Victoria LEBED, Université de Caen - Normandie

Journées Nationales de l'APMEP, Le Havre, 2024



1

Sablés normands



farine

1

sucre

2

*beurre
d'Isigny*

3

œufs

1

Sablés normands



farine

1

sucre

2

*beurre
d'Isigny*

3

œufs



1

2

3

*farine +
sucre +
beurre
d'Isigny +
œufs*

recette : 1 2 3

1

Sablés normands



farine

1

sucre

2

beurre
d'Isigny

3

œufs



1

2

3

farine +
sucre +
beurre
d'Isigny +
œufs

recette : 1 2 3



1

2

3

farine

sucre

beurre
d'Isigny +
œufs

≠ 3 2 1

1

Sablés normands



1

2

3

farine

sucre

beurre
d'Isigny

œufs



1

2

3

farine +
sucre +
beurre
d'Isigny +
œufs

recette : 1 2 3



1

2

3

farine

sucre

beurre
d'Isigny +
œufs

≠ 3 2 1

Recettes alternatives :

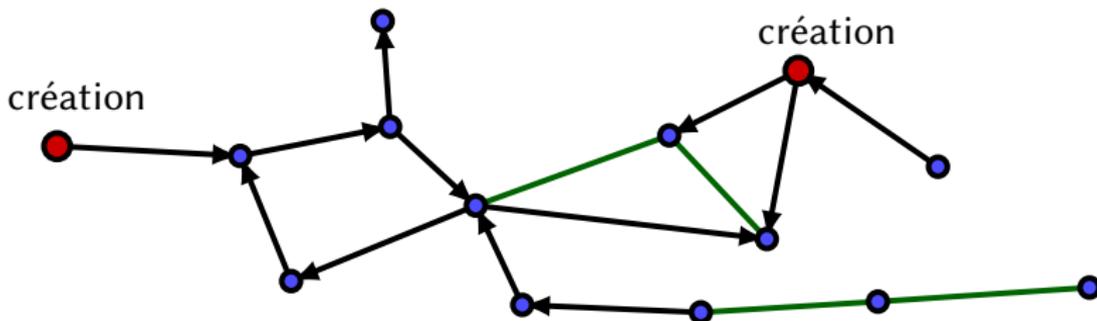
1 2 3 = 1 2 3 2 = 2 1 2 3

= 1 2 2 3 = 1 2 1 3

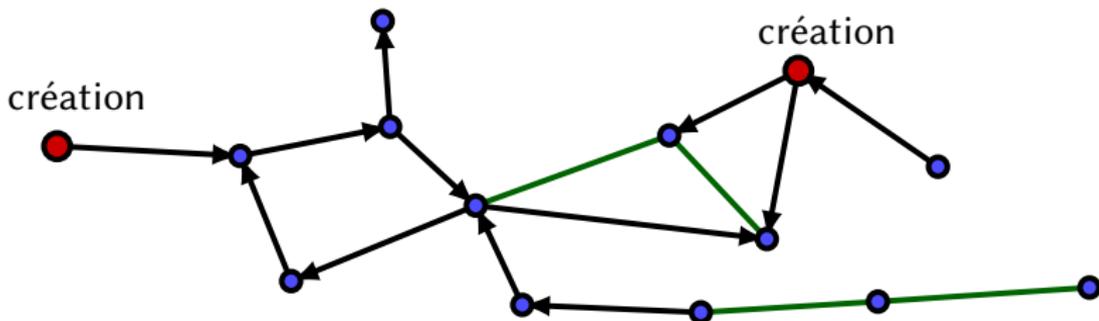
= ...



En pratique, on s'intéresse à des réseaux bien plus complexes, représentés par des graphes :



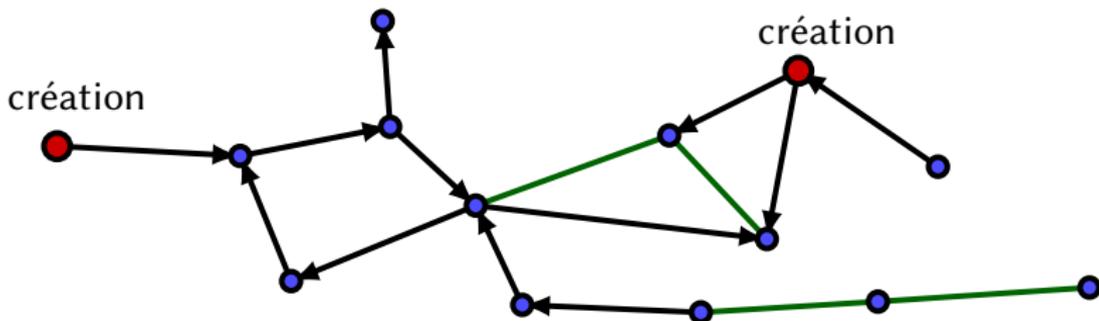
En pratique, on s'intéresse à des réseaux bien plus complexes, représentés par des graphes :



Questions :

- ✓ Lister tous les états possibles de ce système ?

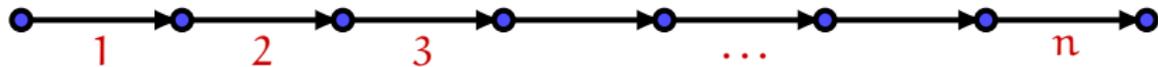
En pratique, on s'intéresse à des réseaux bien plus complexes, représentés par des graphes :



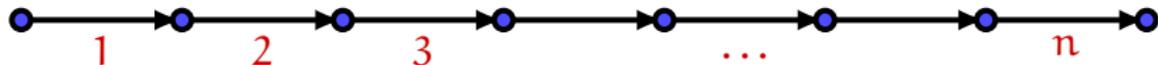
Questions :

- ✓ Lister tous les états possibles de ce système ?
- ✓ Comparer efficacement deux séquences d'échange d'information ?

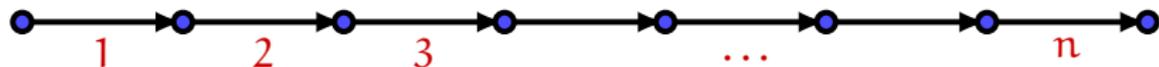
3 Réseaux linéaires



Réseaux linéaires



Notation : x_i = l'échange d'information correspondant à l' i ème canal.



Notation : x_i = l'échange d'information correspondant à l' i ème canal.

Observation : Deux séquences d'échange reliées par une suite de transformations **locales** suivantes amènent au même état :

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots \quad (1)$$

$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots \quad \text{si } i + 1 < j \quad (2)$$

$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots \quad (3)$$



Notation : x_i = l'échange d'information correspondant à l' i ème canal.

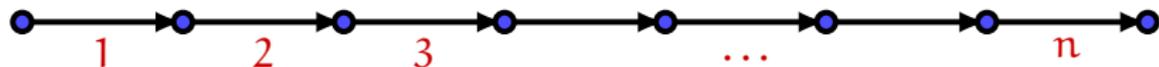
Observation : Deux séquences d'échange reliées par une suite de transformations **locales** suivantes amènent au même état :

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots \quad (1)$$

$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots \quad \text{si } i + 1 < j \quad (2)$$

$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots \quad (3)$$

Notation : L_n = l'ensemble des mots en lettres x_1, \dots, x_n , aux transformations (1)–(3) près.



Notation : x_i = l'échange d'information correspondant à l'ième canal.

Observation : Deux séquences d'échange reliées par une suite de transformations **locales** suivantes amènent au même état :

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots \quad (1)$$

$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots \quad \text{si } i + 1 < j \quad (2)$$

$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots \quad (3)$$

Notation : L_n = l'ensemble des mots en lettres x_1, \dots, x_n , aux transformations (1)–(3) près.

Définition : **monoïde** = “groupe sans inverses”.



Notation : x_i = l'échange d'information correspondant à l'ième canal.

Observation : Deux séquences d'échange reliées par une suite de transformations **locales** suivantes amènent au même état :

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots \quad (1)$$

$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots \quad \text{si } i + 1 < j \quad (2)$$

$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots \quad (3)$$

Notation : L_n = l'ensemble des mots en lettres x_1, \dots, x_n , aux transformations (1)–(3) près.

Définition : **monoïde** = “groupe sans inverses”.

Observation : L_n muni de l'opération *concaténation* est un monoïde.

3 Réseaux linéaires



Notation : x_i = l'échange d'information correspondant à l'ième canal.

Observation : Deux séquences d'échange reliées par une suite de transformations **locales** suivantes amènent au même état :

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots \quad (1)$$

$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots \quad \text{si } i + 1 < j \quad (2)$$

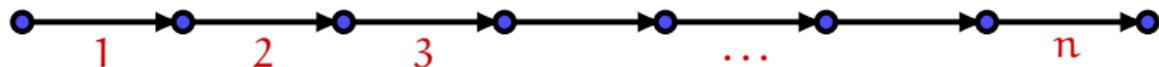
$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots \quad (3)$$

Notation : L_n = l'ensemble des mots en lettres x_1, \dots, x_n , aux transformations (1)–(3) près.

Définition : **monoïde** = “groupe sans inverses”.

Observation : L_n muni de l'opération *concaténation* est un monoïde. Il peut être décrit par **générateurs** (x_1, \dots, x_n) et **relations** ((1)–(3)).

3 Réseaux linéaires



Notation : x_i = l'échange d'information correspondant à l' i ème canal.

Observation : Deux séquences d'échange reliées par une suite de transformations **locales** suivantes amènent au même état :

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots \quad (1)$$

$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots \quad \text{si } i + 1 < j \quad (2)$$

$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots \quad (3)$$

Notation : L_n = l'ensemble des mots en lettres x_1, \dots, x_n , aux transformations (1)–(3) près.

Définition : **monoïde** = “groupe sans inverses”.

Observation : L_n muni de l'opération *concaténation* est un monoïde. Il peut être décrit par **générateurs** (x_1, \dots, x_n) et **relations** ((1)–(3)).

Remarque clin d'œil : Ici on a $2 + 2 = 2!$

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots$$

$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots$$

$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots$$

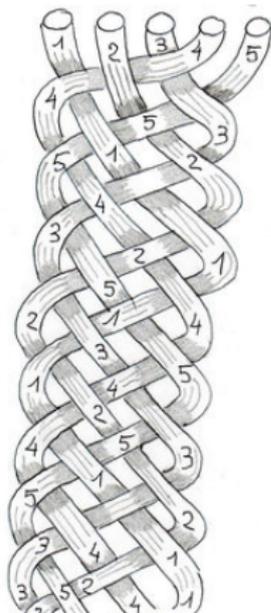
L'œil d'un topologue dit :

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots$$

$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots$$

$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots$$

L'œil d'un topologue dit :



Définition : Une **tresse** à n brins est une collection de n chemins dans l'espace qui relient les n points

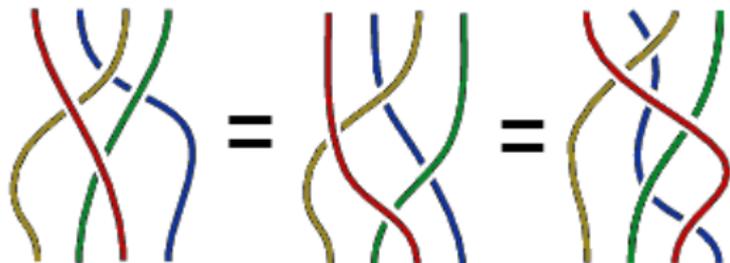
$$(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$$

aux n points

$$(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)$$

et restent toujours ascendants.

On identifie deux tresses reliées par une **isotopie** (qui déforme les brins sans jamais les couper) :



Définition : Une **tresse** à n brins est une collection de n chemins dans l'espace qui relient les n points

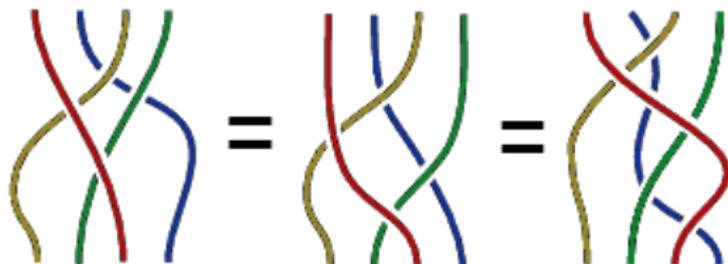
$$(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)$$

aux n points

$$(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)$$

et restent toujours ascendants.

On identifie deux tresses reliées par une **isotopie** (qui déforme les brins sans jamais les couper) :



Notation : B_n = l'ensemble des tresses à n brins (à isotopie près).

Identifier des tresses isotopes n'est pas toujours chose simple.

Ainsi la tresse ci-contre est **triviale**, c-à-d isotope à la tresse à 4 brins verticaux.





6

À quoi ça sert ?

À comprendre, entre autres :

- ✓ le **mouvement de n points** dans le plan (l'axe Oz = le temps);

6 À quoi ça sert ?

À comprendre, entre autres :

✓ le **mouvement de n points** dans le plan (l'axe Oz = le temps);

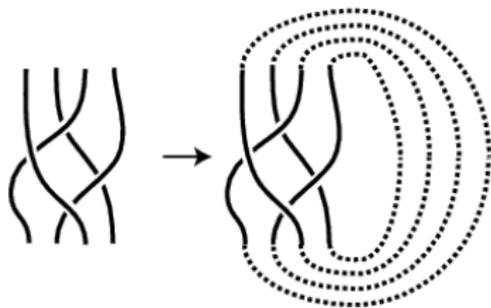


6

À quoi ça sert ?

À comprendre, entre autres :

- ✓ le **mouvement de n points** dans le plan (l'axe Oz = le temps);
- ✓ les **nœuds** et les **entrelacs**—que l'on obtient en fermant les tresses :

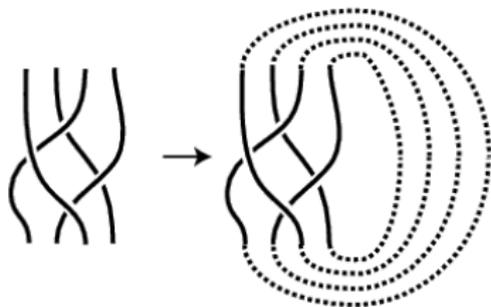


6

À quoi ça sert ?

À comprendre, entre autres :

- ✓ le **mouvement de n points** dans le plan (l'axe Oz = le temps);
- ✓ les **nœuds** et les **entrelacs**—que l'on obtient en fermant les tresses :



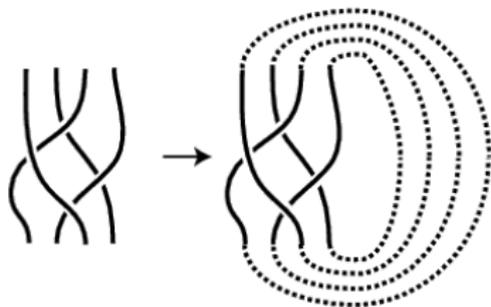
- ✓ l'action d'enzymes sur une molécule d'**ADN**;

6

À quoi ça sert ?

À comprendre, entre autres :

- ✓ le **mouvement de n points** dans le plan (l'axe Oz = le temps);
- ✓ les **nœuds** et les **entrelacs**—que l'on obtient en fermant les tresses :



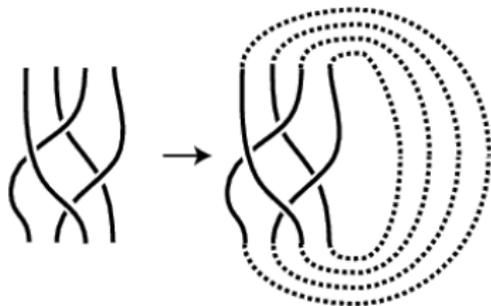
- ✓ l'action d'enzymes sur une molécule d'**ADN**;
- ✓ de nouvelles technologies en **cryptographie** (avec comme clés des tresses plutôt que des nombres);

6

À quoi ça sert ?

À comprendre, entre autres :

- ✓ le **mouvement de n points** dans le plan (l'axe Oz = le temps);
- ✓ les **nœuds** et les **entrelacs**—que l'on obtient en fermant les tresses :

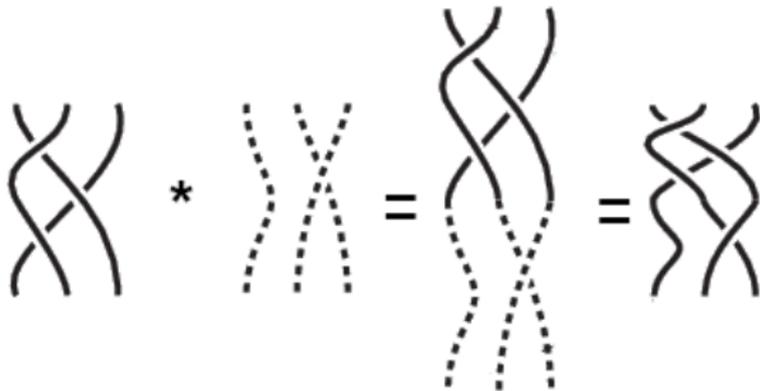


- ✓ l'action d'enzymes sur une molécule d'**ADN**;
- ✓ de nouvelles technologies en **cryptographie** (avec comme clés des tresses plutôt que des nombres);
- ✓ et même les diagrammes de **jonglerie**!



Les groupes de tresses

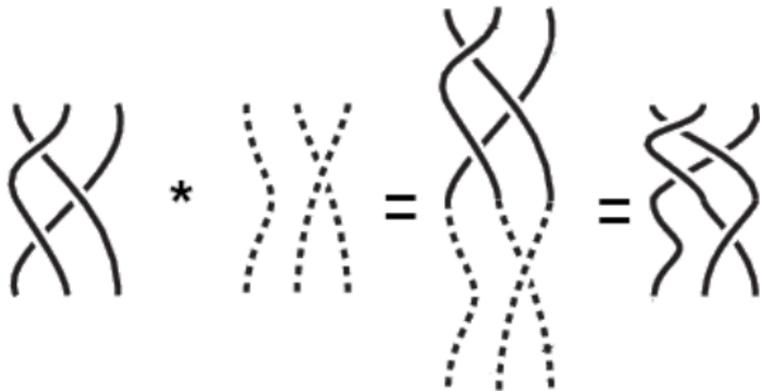
On **compose** deux tresses comme suit :



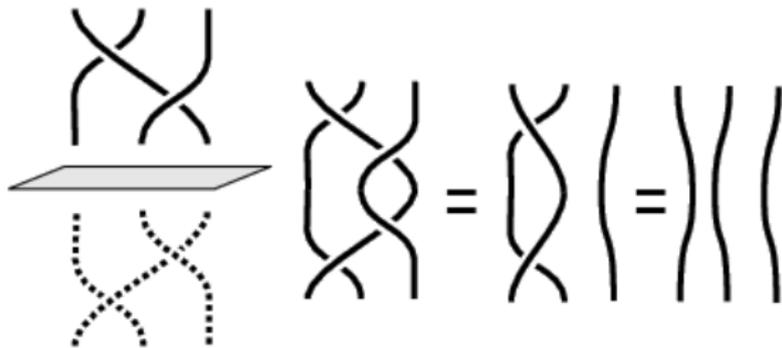


Les groupes de tresses

On **compose** deux tresses comme suit :



L'**inverse** d'une tresse est construit comme suit :



Théorème (Artin, 1925) : Le groupe B_n admet la présentation suivante :

✓ générateurs = tresses élémentaires :

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_1: & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & \dots & n-1 & n \\ \diagdown & \diagup & | & | & \dots & | & | \end{array} & \sigma_1^{-1}: & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & \dots & n-1 & n \\ \diagup & \diagdown & | & | & \dots & | & | \end{array} \\
 \sigma_2: & \begin{array}{ccccccc} | & \diagdown & \diagup & | & \dots & | & | \\ & & & & \vdots & & \end{array} & \sigma_2^{-1}: & \begin{array}{ccccccc} | & \diagup & \diagdown & | & \dots & | & | \\ & & & & \vdots & & \end{array} \\
 \sigma_{n-1}: & \begin{array}{ccccccc} | & | & | & | & \dots & \diagdown & \diagup \end{array} & \sigma_{n-1}^{-1}: & \begin{array}{ccccccc} | & | & | & | & \dots & \diagup & \diagdown \end{array}
 \end{array}$$

(c-à-d chaque tresse est une composition de ces tresses et de leur inverses);

Théorème : Il y a des bijections explicites entre :

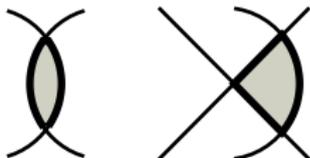
Ⓐ mots dans $L_n : x_1 x_3 x_2 x_1 x_4$;

Théorème : Il y a des bijections explicites entre :

(A) mots dans $L_n : x_1 x_3 x_2 x_1 x_4$;

(B) tresses éparsees (= positives sans digones ni triangles) à $n + 1$ brins ;

interdit :

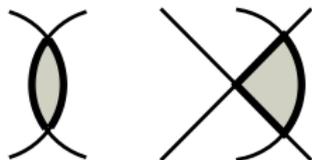


Théorème : Il y a des bijections explicites entre :

(A) mots dans $L_n : x_1 x_3 x_2 x_1 x_4$;

(B) tresses éparses (= positives sans digones ni triangles) à $n + 1$ brins ;

interdit :



(C) couples croissants de suites croissantes d'entiers entre 1 et $n + 1$:

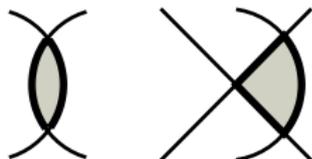
$$\begin{array}{ccccccc}
 b_1 & < & b_2 & < & \dots & < & b_k & \leq & n + 1 \\
 \vee & & \vee & & \dots & & \vee & & \\
 1 & \leq & a_1 & < & a_2 & < & \dots & < & a_k
 \end{array}$$



Théorème : Il y a des bijections explicites entre :

- (A) mots dans $L_n : x_1 x_3 x_2 x_1 x_4$;
- (B) **tresses éparse** (= positives sans digones ni triangles) à $n + 1$ brins;

interdit :



- (C) couples croissants de suites croissantes d'entiers entre 1 et $n + 1$:

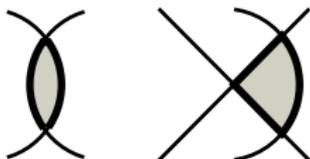
$$\begin{array}{ccccccc}
 b_1 & < & b_2 & < & \dots & < & b_k & \leq & n + 1 \\
 \vee & & \vee & & \dots & & \vee & & \\
 1 & \leq & a_1 & < & a_2 & < & \dots & < & a_k
 \end{array}$$

- (D) états d'un réseau d'information linéaire à n canaux;

Théorème : Il y a des bijections explicites entre :

- (A) mots dans $L_n : x_1 x_3 x_2 x_1 x_4$;
- (B) **tresses éparse** (= positives sans digones ni triangles) à $n + 1$ brins;

interdit :



- (C) couples croissants de suites croissantes d'entiers entre 1 et $n + 1$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 b_1 & < & b_2 & < & \dots & < & b_k & \leq & n + 1 \\
 \vee & & \vee & & \dots & & \vee & & \\
 1 & \leq & a_1 & < & a_2 & < & \dots & < & a_k
 \end{array}$$

- (D) états d'un réseau d'information linéaire à n canaux;
- (E) états d'une cascade de récipients à n cloisons.

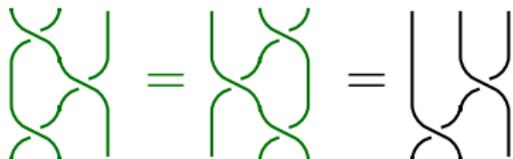
Ⓐ mots dans $L_n \rightarrow$ Ⓑ tresses éparses :

$$x_i^2 = x_i$$

élimination de **digones**

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} = x_i x_{i+1}$$

élimination de **triangles**



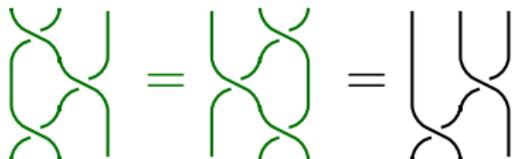
Ⓐ mots dans $L_n \rightarrow$ Ⓑ tresses éparse :

$$x_i^2 = x_i$$

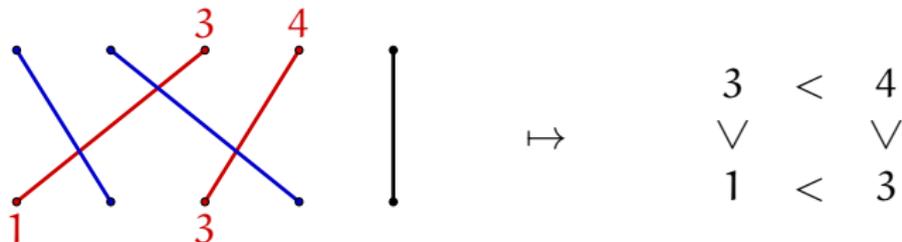
élimination de **digones**

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} = x_i x_{i+1}$$

élimination de **triangles**



Ⓑ tresses éparse \rightarrow Ⓒ doubles suites : suivez les **brins droits** :



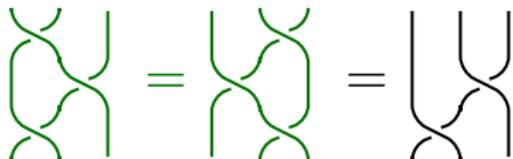
Ⓐ mots dans $L_n \rightarrow$ Ⓑ tresses éparsees :

$$x_i^2 = x_i$$

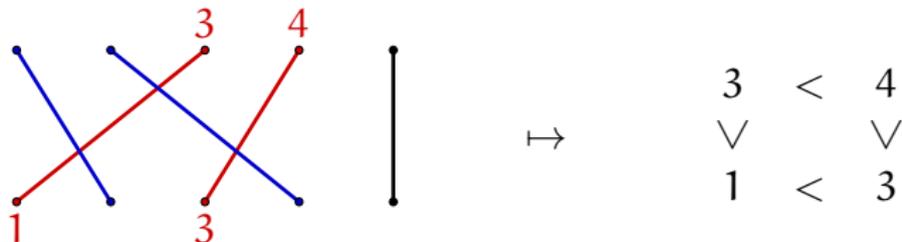
élimination de **digones**

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} = x_i x_{i+1}$$

élimination de **triangles**

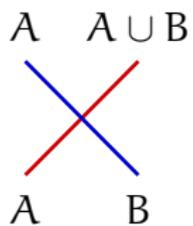


Ⓑ tresses éparsees \rightarrow Ⓒ doubles suites : suivez les **brins droits** :

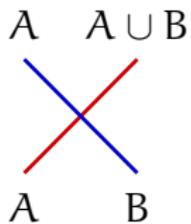


Ⓒ \rightarrow Ⓑ : dessinez les brins droits et compléter.

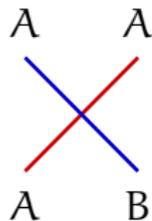
ⓑ → ⓓ états d'un réseau d'information :



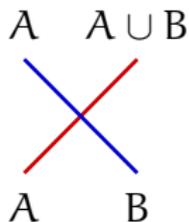
ⓑ → ⓓ états d'un réseau d'information :



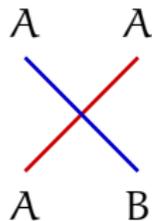
ⓑ → ⓓ' états d'un réseau d'information formatant :



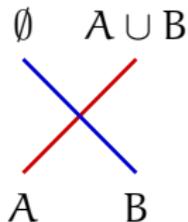
ⓑ → ⓓ états d'un réseau d'information :



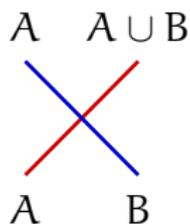
ⓑ → ⓓ' états d'un réseau d'information formatant :



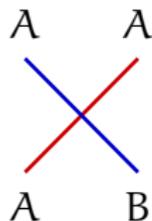
ⓑ → ⓔ états d'une cascade de réceptifs :



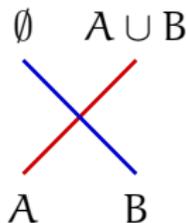
ⓑ → ⓓ états d'un réseau d'information :



ⓑ → ⓓ' états d'un réseau d'information formatant :



ⓑ → ⓔ états d'une cascade de récipients :



Remarque : Il s'agit d'actions du monoïde L_n sur les n -uplets $\in I^n$, pour des ensembles I bien choisis.

Rappelons nos questions :

- ✓ Lister tous les états possibles d'un système?
- ✓ Comparer efficacement deux séquences d'échange d'information?
- ✓ Déterminer la façon la plus rapide d'obtenir l'état souhaité?

Rappelons nos **questions** :

- ✓ Lister tous les états possibles d'un système?
- ✓ Comparer efficacement deux séquences d'échange d'information?
- ✓ Déterminer la façon la plus rapide d'obtenir l'état souhaité?

Les **réponses** deviennent évidentes dans le langage de **doubles suites**!

Rappelons nos questions :

- ✓ Lister tous les états possibles d'un système?
- ✓ Comparer efficacement deux séquences d'échange d'information?
- ✓ Déterminer la façon la plus rapide d'obtenir l'état souhaité?

Les réponses deviennent évidentes dans le langage de **doubles suites!**

En particulier, le nombre d'états possibles est :

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1} \quad \text{n^{ième} nombre de Catalan}$$

Rappelons nos questions :

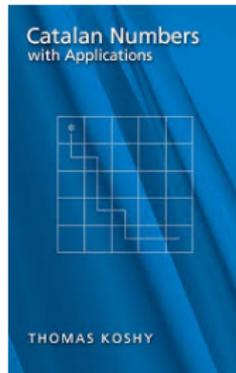
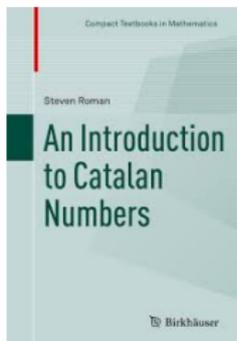
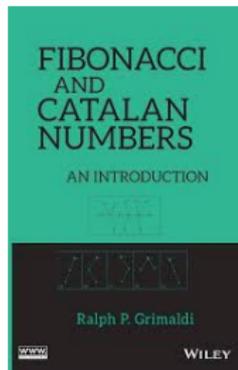
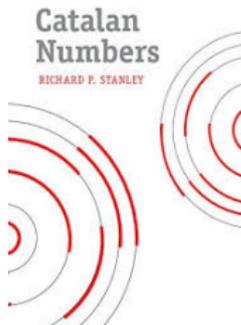
- ✓ Lister tous les états possibles d'un système?
- ✓ Comparer efficacement deux séquences d'échange d'information?
- ✓ Déterminer la façon la plus rapide d'obtenir l'état souhaité?

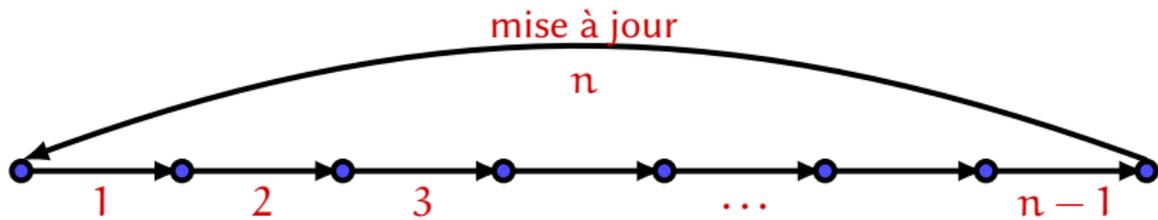
Les réponses deviennent évidentes dans le langage de **doubles suites**!

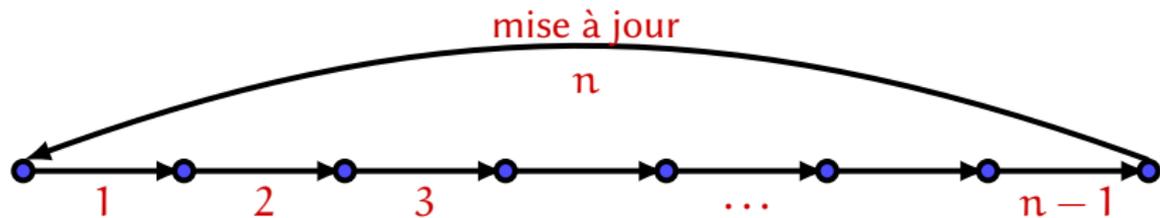
En particulier, le nombre d'états possibles est :

$$C_{n+1} = \frac{1}{n+2} \binom{2n+2}{n+1}$$

n ième nombre de Catalan







Définition : C_n est le monoïde défini par la présentation suivante :

✓ générateurs x_1, \dots, x_n ;

✓ relations :

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots$$

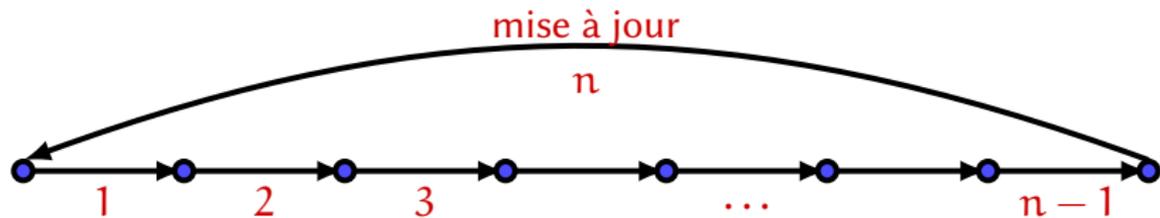
$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots$$

$$1 < j - i < n - 1$$

$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots$$

$$1 \leq i < n + 1$$

Ici les indices sont modulo n , c-à-d $x_{n+1} = x_1$.



Définition : C_n est le monoïde défini par la présentation suivante :

✓ générateurs x_1, \dots, x_n ;

✓ relations :

$$\dots x_i x_i \dots = \dots x_i \dots$$

$$\dots x_i x_j \dots = \dots x_j x_i \dots$$

$$1 < j - i < n - 1$$

$$\dots x_i x_{i+1} x_i \dots = \dots x_{i+1} x_i x_{i+1} \dots = \dots x_i x_{i+1} \dots$$

$$1 \leq i < n + 1$$

Ici les indices sont modulo n , c-à-d $x_{n+1} = x_1$.

Remarque : ce monoïde est infini.

Définition : $B_{n,1}$ est le groupe des tresses à n brins sur le cylindre.

ROPE CONSTRUCTIONS



3-strand

3-Strand ropes have been produced since the early days of rope making. They are what you picture when you think of rope. Their appearance is similar to 'soft serve' ice cream. The ropes are made with a special stabilization process construction. This way they become durable, long-lasting, flexible and easy-to-handle. Another advantage is, that they won't harden with age.



Single braid

Single braid ropes are made of a simple construction that absorbs twist. It does not kink but provides great resistance to simple construction. These ropes have a braided outside with no core. They are also known as 'hollow braid'.



Double braid

Double braid ropes feature a braided core inside a braided cover. The core makes the rope strong and durable. Because the rope consists of two individual parts, it is possible to combine different fibers to create ropes merging several different raw materials. For example, a high tensile core with a heat resistant cover. These ropes are similar to kernmantle ropes however they are spliceable.



Kernmantle

Kernmantle ropes are the most common construction for dynamic climbing ropes. They feature a tight cover to protect the core from any ingress of dirt or particles that might harm the core. The sheath is designed for friction for rappelling and lowering operations. The core is comprised of straight bundles of fiber that are held together by a special process. The amount of twist in the core fibers in one of the main characteristics of whether the rope is static or dynamic.



PLATINUM

PLATINUM® is the name of TEUFELBERGER's patented and innovative braiding technology. Ropes with the PLATINUM® feature a permanent, mechanical connection between core and cover. Moreover, additionally, PLATINUM® connects the independent elements of a rope result in a compact rope with good handling and:

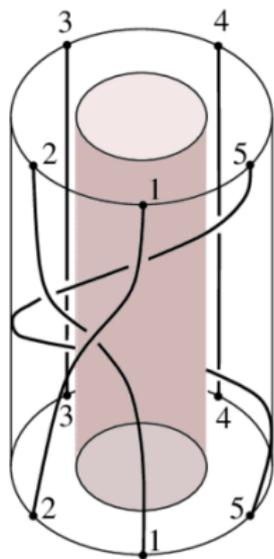
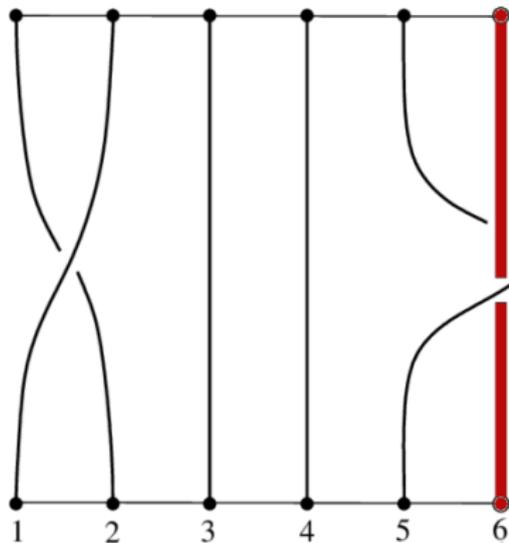
Explore more about our [PLATINUM® Technology](#)



Str8 Jacket

Ropes with Str8 Jacket Core construction feature an intermediate layer of fibers between the core and the cover to hold its shape better, keep cover and core in balance and therefore, eliminating sheath slippage. This MAXIM® Chalk Lines to avoid sheath slippage in heavy top rope use.

Définition alternative : $B_{n,1}$ est le sous-groupe de B_{n+1} constitué des tresses à $n + 1$ brins avec le dernier brin rigide.

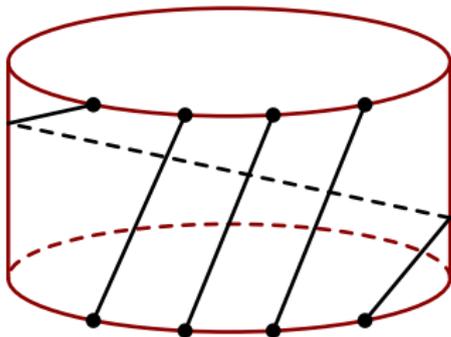


Ce groupe admet une présentation comme suit :

✓ générateurs :

- les tresses élémentaires $\sigma_1, \dots, \sigma_n$;
- la **vrille** :

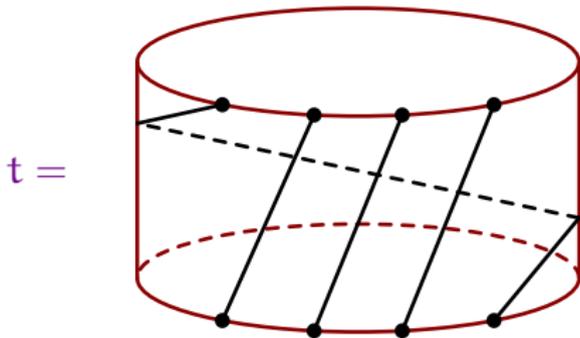
t =



Ce groupe admet une présentation comme suit :

✓ générateurs :

- les tresses élémentaires $\sigma_1, \dots, \sigma_n$;
- la **vrille** :

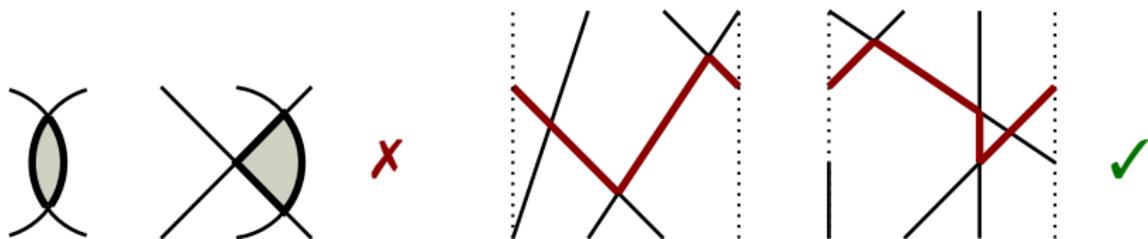


✓ relations : **exercice!**

Théorème : Il y a des bijections explicites entre :

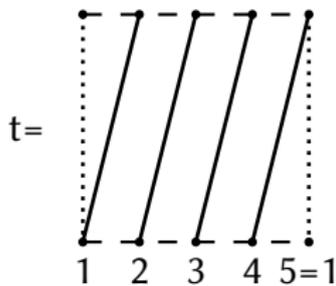
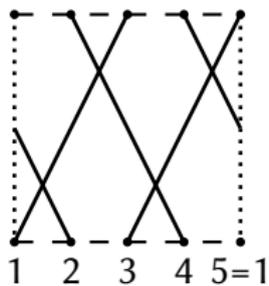
- (A) mots dans $C_n : x_1 x_3 x_2 x_1 x_4$;
 (B) tresses positives à n brins sur le cylindre

✓ éparsees = sans digones ni triangles **contractibles** ;



✓ pouvant s'écrire sans la vrille t .

Exemple :



Théorème : Il y a des bijections explicites entre :

- (A) mots dans $C_n : x_1 x_3 x_2 x_1 x_4$;
- (B) “bonnes” tresses ;
- (C) couples croissants et n -proches de suites croissantes d'entiers :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & b_1 & < & b_2 & < & \dots & < & b_k & < & b_1 + n \\
 & \vee & & \vee & & \dots & & \vee & & \\
 1 & \leq & a_1 & < & a_2 & < & \dots & < & a_k & \leq & n
 \end{array}$$

Théorème : Il y a des bijections explicites entre :

- (A) mots dans $C_n : x_1 x_3 x_2 x_1 x_4$;
- (B) “bonnes” tresses ;
- (C) couples croissants et n -proches de suites croissantes d'entiers :

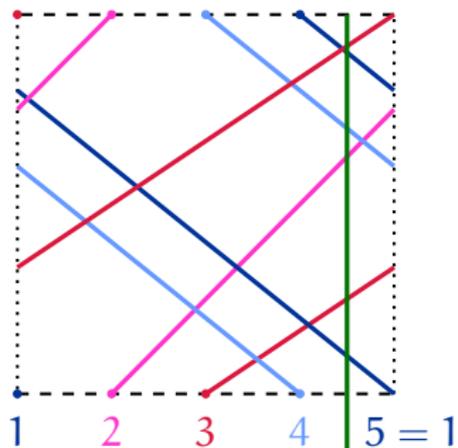
$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & b_1 & < & b_2 & < & \dots & < & b_k & < & b_1 + n \\
 & & \vee & & \vee & & \dots & & \vee & & \\
 1 & \leq & a_1 & < & a_2 & < & \dots & < & a_k & \leq & n
 \end{array}$$

- (D) états de certains systèmes.

ⓑ → ⓒ : suivez les brins droits :

un brin $a \rightarrow b$ qui tourne autour du cylindre w fois

$$\leadsto a < b + w * n.$$



$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ \uparrow & \uparrow \\ 2 & 3 \end{array} = *4$$

 \leadsto

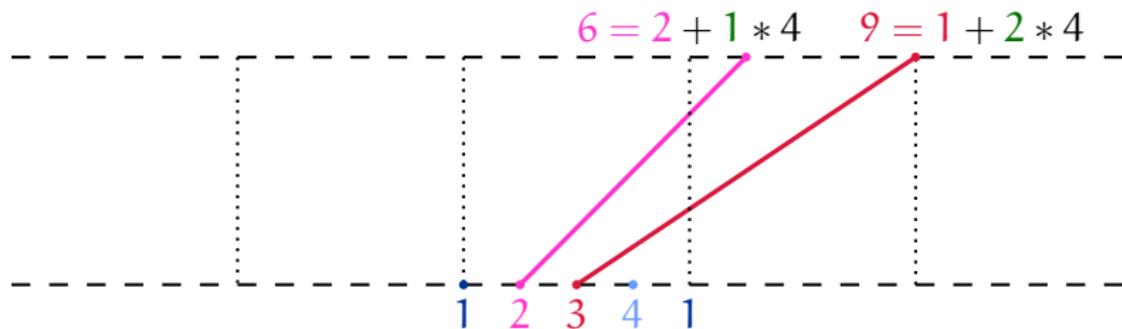
$$\begin{array}{cc} 6 & < & 9 \\ \vee & & \vee \\ 2 & < & 3 \end{array}$$

6 < 9 division euclidienne

✓ ✓

2 < 3

Ⓒ → Ⓑ :

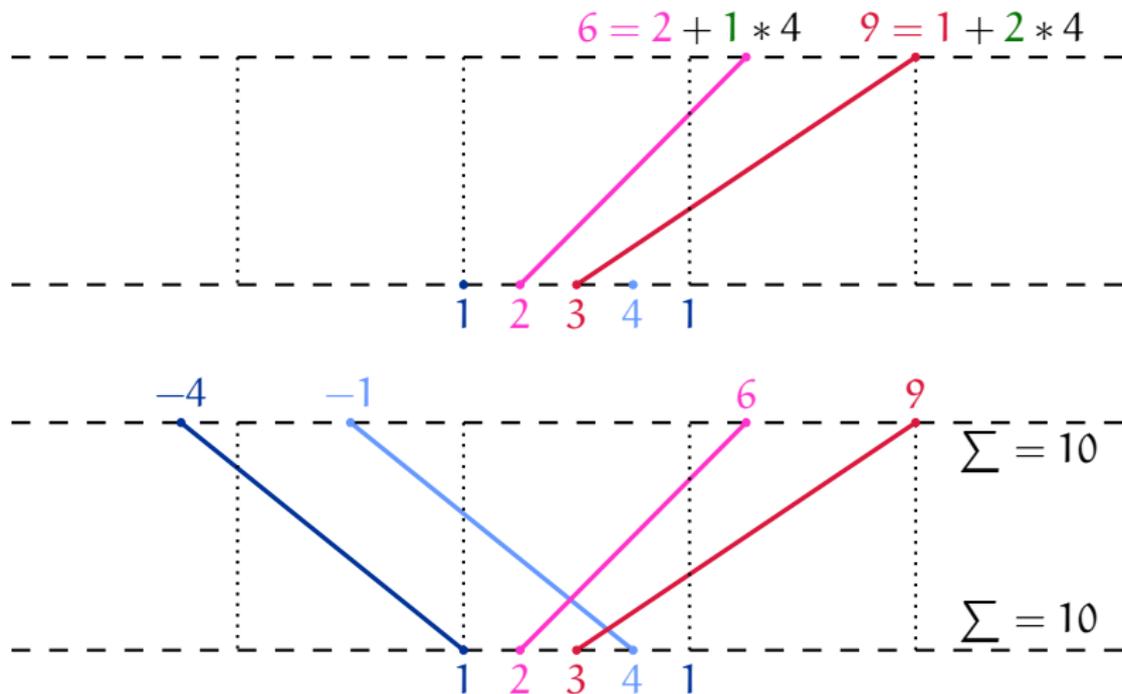


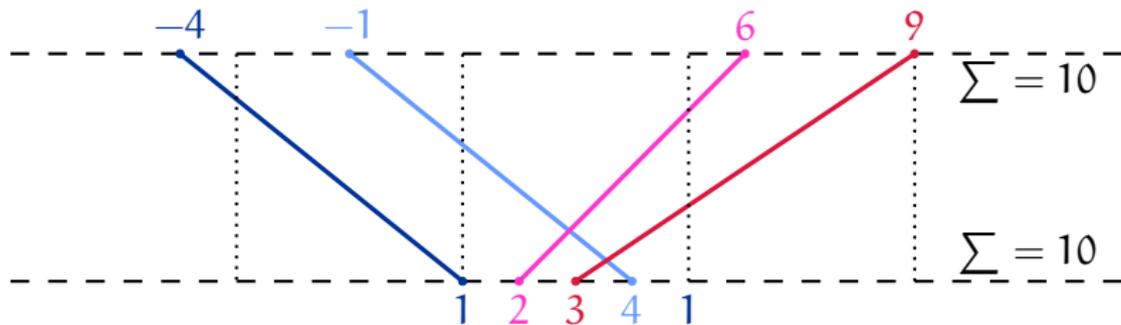
6 < 9 division euclidienne

∨ ∨

2 < 3

Ⓒ → Ⓑ :





③

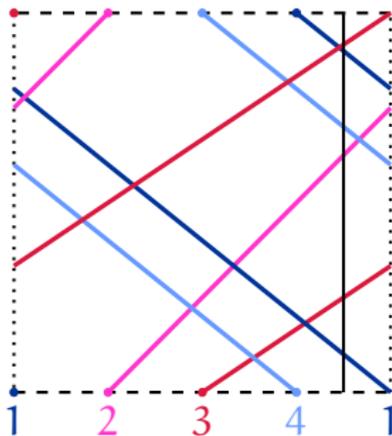


②



①

$6 < 9$
 \vee
 $2 < 3$



$\times_4 \times_3 \times_1 \times_4 \times_2 \times_1 \times_3 \times_2 \times_4 \times_3$

③

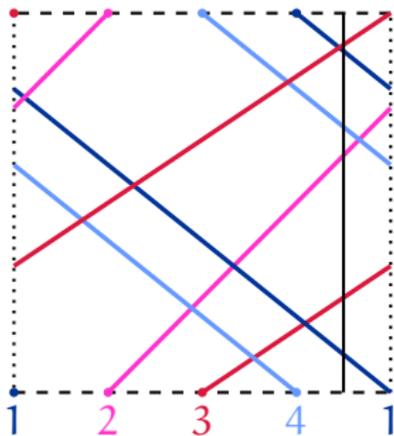


②



①

6 < 9
 ✓ < ✓
 2 < 3


 $x_4 x_3 x_1 x_4 x_2 x_1 x_3 x_2 x_4 x_3$

Là encore, on a des réponses à nos questions!

- ✓ Lister tous les états possibles d'un système?
- ✓ Comparer efficacement deux séquences d'échange d'information?
- ✓ Déterminer la façon la plus rapide d'obtenir l'état souhaité?