Autour des équations de Pell-Fermat (Brahmagupta)

Quel est le nombre d'animaux du troupeau d'Hélios ?

I. Introduction aux équations de Pell-Fermat
   A. Problème des bœufs d'Hélios : Système linéaire
   B. Mise en équation de la seconde partie

II. Réduction de l'équation de Pell-Fermat
   A. Fractions continues et réduites
   B. Solution fondamentale

III. Résolution informatique de l'équation de Pell-Fermat : Solution du problème
   A. Recherche de la solution fondamentale
   B. Application au problème des bœufs d'Hélios

- Conclusion

I. Introduction aux équations de Pell-Fermat

Dénombre, Ami, les troupeaux du Soleil qui couvraient jadis les plaines de la Sicile, divisés en quatre groupes selon leurs couleurs, les blancs, les noirs, les marrons et les tachetés. Il y avait plus de taureaux que de vaches, et les relations entre leurs nombres étaient les suivantes :

A. Problème des bœufs d'Hélios : Système linéaire

Tableau des Symboles	Blanc : $B=W+w$	Noir : $N=X+x$	Marron : $M=Y+y$	Tacheté : $T=Z+z$
Taureau	W	X	Y	Z
Vache	w	x	y	z

$$\begin{cases} W = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) X + Y \\ X = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) Z + Y \\ Z = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) W + Y \\ w = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) N \\ x = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) T \\ y = \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) M \\ z = \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right) B \end{cases}$$

MAPLE **SOL1**

$$\left\{ \begin{array}{c} z = PPCM * k = 3515820k, \\ W = 10366482 * k, X = 7460514 * k, \\ Y = 4149387 * k, Z = 7358060 * k, \\ w = 7206360 * k, x = 4893246 * k, y = 5439213 * k \end{array} \right\}$$

Si tu peux donner, Ami, le nombre de chaque sorte de vaches et de taureaux, tu n'es pas un novice en matière de nombres, mais on ne peut encore te considérer comme ayant un talent supérieur. Apprends, cependant, qu'il y avait aussi d’autres relations entre les taureaux du Soleil.

Si tu peux calculer également ces nombres, Ami, et trouver ainsi la taille totale du troupeau, exulte, car par ta conquête, tu as montré que tu as atteint le degré suprême dans la science des nombres.

B. Mise en équation de la seconde partie

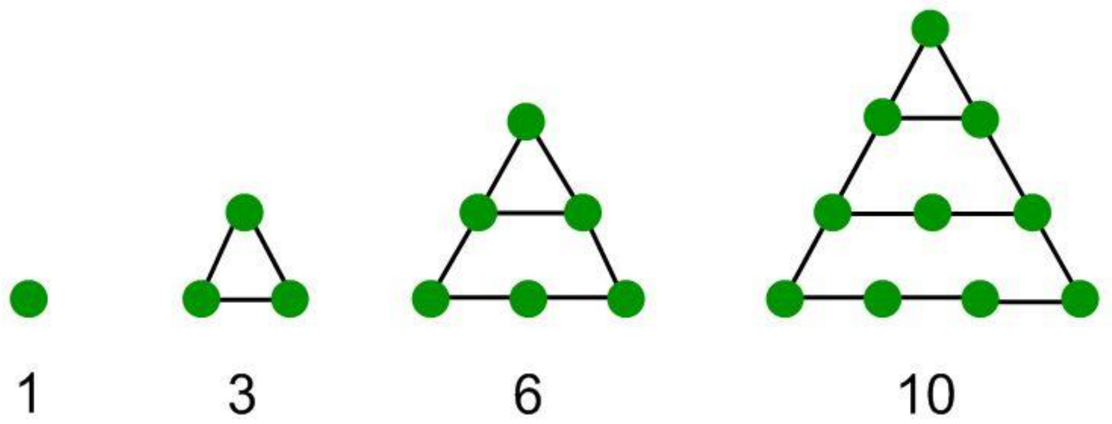
- Carré Parfait $W + X = \lambda^2$

$$= 17826996 * k$$
$$= 2^2 * 3 * 11 * 29 * 4657 * k$$

DONC z=PPCM*3*11*29*4657*m²

$$\mathbf{SOL2}\left\{\begin{matrix} z = 15669127269180 * m^2, W = 46200808287018 * m^2, \\ X = 33249638308986 * m^2, Y = 18492776362863 * m^2, \\ Z = 32793026546940 * m^2, w = 32116937723640 * m^2, \\ x = 21807969217254 * m^2, y = 2424120709853 7 * m^2 \end{matrix}\right\}$$

- Nombre triangulaire : $Y + Z = \frac{\mu^2+\mu}{2}$



Crédits: Google image

CONDITION : Discriminant carré parfait => Équation de PELL

$$\Delta = 410286423278424\, m^2 + 1$$

$$p^2 - 410286423278424\, m^2 = 1$$

II.

A. Fractions continues et réduites

Écrire α ∈ ℝ comme fraction continue :

- Si α entier : ☺
- Sinon écrire $\boldsymbol{\alpha} = \lfloor \boldsymbol{\alpha} \rfloor + (\boldsymbol{\alpha} - \lfloor \boldsymbol{\alpha} \rfloor)$
- …
- ☺

« On appelle Réduite de rang n du nombre α le rationnel $\frac{P_n}{Q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ »

$$p^2 - m^2 d = (p - m\sqrt{d})(p + m\sqrt{d})$$

Donc une solution de l'équation de Pell est une réduite de $\sqrt{d}$

Démo (réduite) :

$$\left(p - m\sqrt{d}\right)\left(p + m\sqrt{d}\right) = 1$$

$$\left(p - m\sqrt{d}\right) = \frac{1}{p + m\sqrt{d}}$$

$$Ainsi\ \left(p - m\sqrt{d}\right) > 0$$

$$p > m\sqrt{d}$$

$$Or, \quad \left|\sqrt{d} - \frac{p}{m}\right| = \frac{p - m\sqrt{d}}{m} = \frac{1}{m\left(p + m\sqrt{d}\right)} < \frac{1}{m\left(m\sqrt{d} + m\sqrt{d}\right)}$$

$$\left|\sqrt{d} - \frac{p}{m}\right| < \frac{1}{2m^2\sqrt{d}}$$

$$Donc\ \left|\sqrt{d} - \frac{p}{m}\right| < \frac{1}{2m^2}$$

$Condition\ pour\ que\ \frac{p}{m} soit\ une\ réduite\ de\ \sqrt{d}$ d'après le théorème de la meilleure approximation : « La réduite s'écrit p/m, si et seulement si l'écart entre ce nombre rationnel et le nombre irrationnel qu'elle représente est inférieur à $1/m^2$»

B. Solution fondamentale

$(\mathbb{Q}[\sqrt{d}],+,.)$ est un corps commutatif

Norme N(α)=αᾱ donc éléments inversible de $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ de norme ± 1

- (p,m) solution d'une équation de Pell

- $u_1 = p\,, v_1 = m \quad , \; u_n + \sqrt{d}v_n = (u_1 + \sqrt{d}v_1)^n$

- $(u_n, v_n)\ solution \overset{ssi}{\Leftrightarrow} (u_1, v_1) solution$
  En effet par l'identité de Brahmagoupta :

$$(a^2 - nb^2)(c^2 - nd^2) = (ac \pm nbd)^2 - n(ad \pm bc)^2$$

- Donc toutes les solutions sont caractérisées par une puissance n-ième de la solution fondamentale (On résonne sur la norme des éléments inversibles)

III.

A. Recherche de la solution fondamentale

#Définir s et q pour distinguer les cas
 	
def valeurSetQ(D):
if D%4==1:
s=2
q=1
elif D%4==0:
s=2
q=0
else:
s=1
q=0
return(s,q)
	#Une solution des équations de Pell est une réduite
	#Algorithme pour trouver les réduites
	
	def recurrence_GB(D):
	s=valeurSetQ(D)[0]
	q=valeurSetQ(D)[1]
	P=q
	Q=s
	q0=int((sqrt(D)+q)/s)
	i=0
	G_1=s
	B_1=0
	G_0=int((sqrt(D)+q)/s)*s-q
	B_0=1
	while (abs(Q-s)>0) or i==0:
	P=q0*Q-P
	Q=(D-P**2)/Q
	q0=int((P+sqrt(D))/Q)
	G_1,G_0=G_0,q0*G_0+G_1
	B_1,B_0=B_0,q0*B_0+B_1
	i=i+1
	return([i,s,G_1,B_1])

Annexe 1

def table(D):
a=recurrence_GB(D)
x=a[2]
y=a[3]
S=a[1]
sig=(-1)**a[0]
if S==1:
k=1
elif x%2==0 and y%2==0 and sig==1:
k=1
elif x%2==0 and y%2==1 and sig==1:
k=2
elif x%2==0 and sig==-1:
k=2
elif x%2==1 and sig==1:
k=3
elif x%2==1 and sig==-1:
k=6
return(k)
 	
def donnees(D):
K=table(D)
a=recurrence_GB(D)
return(D,a[2],a[3],a[1],K)
	#Multiplication de la forme voulue
	
	def mult(D,(a,b),(c,d)):
	return((a*c+(b*d)*D,a*d+c*b))
	
	def puissance(D,(a,b),n):
	c=(a,b)
	for i in range (n-1):
	c=mult(D,(a,b),c)
	return(c)
	
	#Donner les diviseurs d’un nombre
	
	def diviseurs(n):
	L=[]
	for i in range(1,n/2+1):
	if n%i==0:
	L.append(i)
	else:
	L=L
	L.append(n)
	return(L)

Annexe 2

def puissance_chgt_var(D,p):
A=diviseurs((p+1)/2)
e=fondamental(D)
i=0
while puissance(D,e,A[i])[1]%p>0 or i<len(A)-1:
i=i+1
return(2*A[i])
	#Donner les parités des moitiés successives d'un nombre
	
	def liste(n):
	L=[]
	while(n>1):
	if n%2==0:
	L.append(0)
	n=n/2
	else:
	L.append(1)
	n=n-1
	L.reverse()
	return(L)

#Donner la solution fondamentale
 	
def fondamental(D):
l=donnees(D)
e=puissance(D,(l[1]/l[3],l[2]/l[3]),l[4])
return(e)
 	
#Puissances des solutions
 	
def solutions(D,n):
L=[fondamental(D)]
for i in range(1,n):
L=L+[mult(D,L[i-1],L[0])]
return(L)
	#Donner les autres solutions à partir de la fondamentale
	
	def pui2(D,(a,b),P):
	L=liste(P)
	e=(a,b)
	E=(a,b)
	if L[0]==1:
	E=E
	for i in range(1,len(L)):
	if L[i]==0:
	E=mult(D,E,E)
	else:
	E=mult(D,E,e)
	else:
	for i in range(len(L)):
	if L[i]==0:
	E=mult(D,E,E)
	else:
	E=mult(D,E,e)
	return(E)

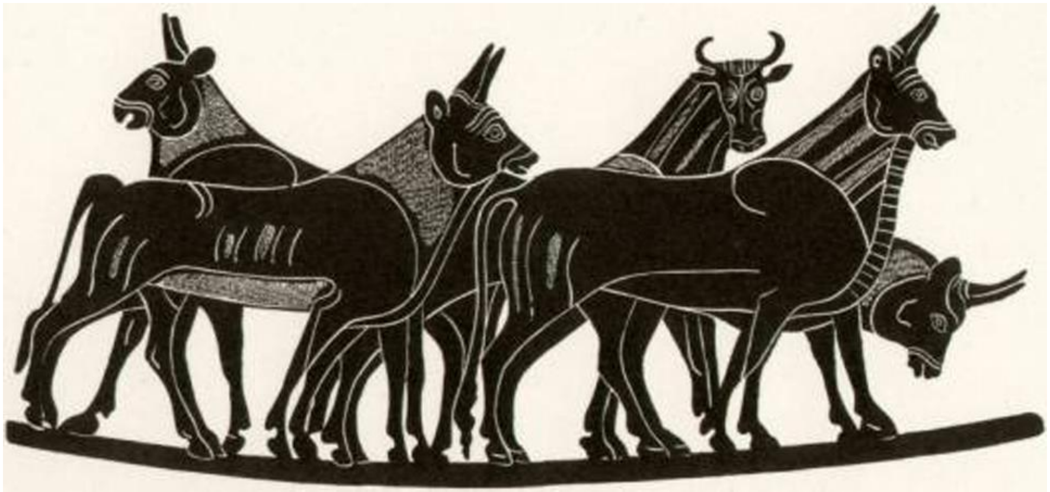
B. Application au problème des bœufs d'Hélios

#Résultat bœufs Hélios. D=410286423278424 et P=2

```
def resultat(D,P):
e=fondamental(D)
fichier=open("resultat.txt",'w')
fichier.write(str((int((pui2(D,e,P)[0]-1))*25194541)/92059576))
```

Écriture ~10sec

Troupeau : $7{,}76.10^{206545}$



Conclusion

- Bibliographie:

- Ilan Vardi, Archimedes'Cattle Problem, New York University, Mathematics Department Occidental College.
- Michael J.Jacobson, Jr., Hugh C. Williams, Solving the Pell Equation