

# L'équation de Yang–Baxter et les groupes abéliens libres “quantiques”

Victoria LEBED, Université de Caen Normandie

Le Séminaire Virtuel Francophone Groupes et Géométrie,  
Février 2023

$$\langle a, b \mid ab = ba \rangle \xrightarrow{\text{déformation}} \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$$

$$\mathbb{R}^2/G \cong$$



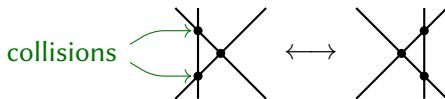
**Données** : e.v.  $V$ ,  $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ .

L'équation de Yang-Baxter (YBE) :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_V, \sigma_2 = \text{Id}_V \otimes \sigma.$$

- ✓ condition de factorisation pour les matrices de dispersion dans le problème à  $n$  corps en dim. 1 (McGuire & Yang 60') ;



- ✓ condition pour la fonction de partition d'un modèle sur réseau exactement résoluble (Onsager '44; Baxter 70') ;
- ✓ ...
- ✓ R-matrice dans un groupe quantique (Drinfel'd 80') ;
- ✓ algèbres  $C^*$  (Woronowicz 80') ;
- ✓ produit tensoriel tordu dans la géométrie non-commutative (Majid 90') ;

1

# YBE et ses avatars

**Données:** e.v.  $V$ ,  $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$ .

L'équation de Yang-Baxter (YBE) :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_V, \sigma_2 = \text{Id}_V \otimes \sigma.$$

✓ équation de tresses en topologie.

$$\sigma \longleftrightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array}$$



$$\text{YBE} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}$$

mouvement  
Reidemeister III

Le monoïde/groupe de tresses  $B_n^{(+)}$  agit sur  $V^{\otimes n}$ .

- ✓ **Construire** des solutions intéressantes.
- ✓ **Classifier** les solutions.

Difficile ! En dim 2, il y a 96 (classes de) solutions (*Hietarinta '92*).

Approche de *Drinfel'd (90')* :

**Étape 1.** Classifier les **solutions ensemblistes**  $\sigma: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$ .

**Étape 2.** Comprendre leur **déformations** :

sol. ens.  $(S, \sigma)$   $\xrightarrow{\text{linéariser + déformer}}$  sol. lin.  $(\mathbb{R}S, \tilde{\sigma})$ .

On ne parlera que de solutions ensemblistes.

- ✓ Trouver des **invariants** de solutions.

✓  $\sigma(x, y) = (y, x) \rightsquigarrow$  R-matrices.

✓  $\sigma(x, y) = (y, x) \rightsquigarrow \sigma(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y],$

où  $(V, [])$  est une algèbre de Lie, et  $\forall v, [1, v] = [v, 1] = 0.$

YBE pour  $\sigma \iff$  identité de Jacobi pour  $[]$

✓  $\sigma(x, y) = (f(y), f^{-1}(x)),$  où  $f \in \text{Bij}(X)$  (solution-permutation).

✓ **monoïde**  $(S, *, 1)$ ,  $\sigma(x, y) = (1, x * y)$  ;

YBE pour  $\sigma \iff$  associativité pour  $*$

✓ **monoïde factorisé**  $G = HK$ ,

$S = H \cup K$ ,  $\sigma(x, y) = (h, k)$ ,  $h \in H, k \in K, hk = xy$  ;

✓ **réseau**  $(S, \wedge, \vee)$ ,  $\sigma(x, y) = (x \wedge y, x \vee y)$  ;

✓ **algorithme de Schensted** pour les **tableaux de Young**.

$$\text{Grp}(\mathcal{S}, \sigma) = \langle \mathcal{S} \mid xy = y'x' \text{ quand } \sigma(x, y) = (y', x') \rangle$$

Monoïde de structure  $\text{Mon}(\mathcal{S}, \sigma)$  : définition analogue.

**Exemples :**

✓ monoïde  $(\mathcal{S}, *, 1)$ ,  $\sigma(x, y) = (1, x * y)$ ,

$$\mathcal{S} \simeq \text{Mon}(\mathcal{S}, \sigma) / \mathbf{1}_{\mathcal{S}} = \mathbf{1}_{\text{Mon}} ;$$

✓ algèbre de Lie  $(V, [], 1)$ ,  $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar \mathbf{1} \otimes [x, y]$ ,

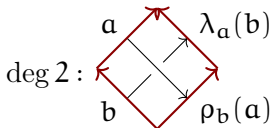
$$\text{UEA}(V, [], \mathbb{k}) \simeq \mathbb{k} \text{Mon}(\mathcal{S}, \sigma) / \mathbf{1} = \mathbf{1}_{\text{Mon}}.$$

Représentations de  $(\mathcal{S}, \sigma) :=$  représentations de  $\mathbb{k} \text{Mon}(\mathcal{S}, \sigma)$ .

Solution  $(S, \sigma) \rightsquigarrow$  espace classifiant  $B(S, \sigma)$  :

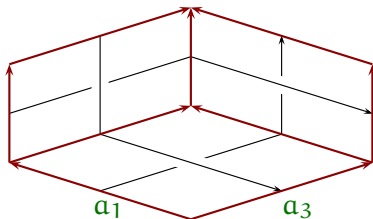
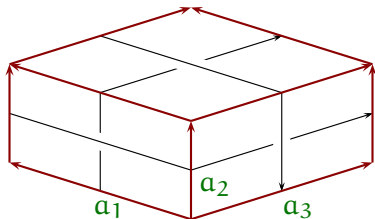
deg 0: \*

deg 1:  $* \xrightarrow{a} *$



$$\sigma(a, b) = (\lambda_a(b), \rho_b(a))$$

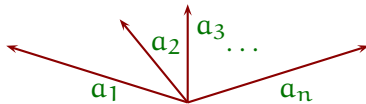
deg 3:



YBE pour  $\sigma \iff$  ce coloriage se propage

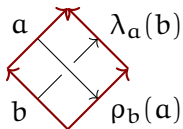


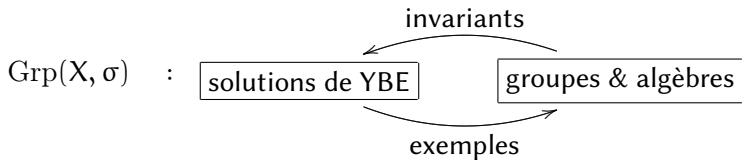
$$\text{deg } n: \prod_{S \times n} [0, 1]^n$$



Le coloriage se propage sur toutes les arêtes de  $[0, 1]^n$ .

$$\pi_1(B(S, \sigma)) \cong \text{Grp}(S, \sigma)$$





Bonnes propriétés de  $(X, \sigma) \implies$  bonnes propriétés de  $\text{Grp}(X, \sigma)$ .

**Théorème :**  $(S, \sigma)$  fini, non-dégénéré,  $\sigma^2 = \text{Id} \implies$

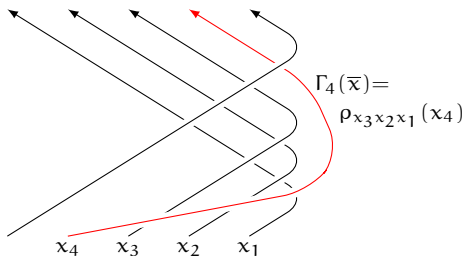
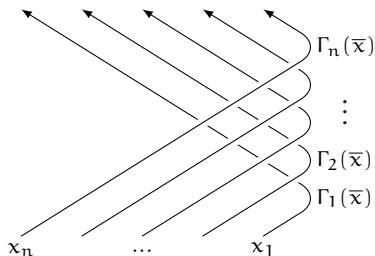
- ✓  $\text{Mon}(S, \sigma)$  est **de type I, simplifiable, Ore** ;
- ✓  $\mathbb{k} \text{Mon}(S, \sigma)$  est **Koszul, noethérienne, Cohen–Macaulay, Artin–Schelter régulière** ;
- ✓  $\text{Grp}(S, \sigma)$  est **résoluble, Garside, Bieberbach** ;
- ✓  $\text{Grp}(S, \sigma)$  est **ordonnable à gauche**  $\Leftrightarrow (S, \sigma)$  est **multi-permutation**  
(= extension itérée d'une solution-permutation).

(Manin, Gateva-Ivanova & Van den Bergh, Etingof–Schedler–Soloviev, Jespers–Okniński, Chouraqui, Bachiller–Cedó–Vendramin, ..., 80'-...).

Application guitare

$$\Gamma: \mathcal{S}^{\times n} \longrightarrow \mathcal{S}^{\times n},$$

$$(x_n, \dots, x_1) \longmapsto (\dots, \rho_{x_2 x_1}(x_3), \rho_{x_1}(x_2), x_1).$$



Application guitare  $\Gamma: S^{\times n} \rightarrow S^{\times n}$ ,

$$(x_n, \dots, x_1) \mapsto (\dots, \rho_{x_2 x_1}(x_3), \rho_{x_1}(x_2), x_1).$$

**Théorème** (*Etingof–Schedler–Soloviev '99*) :

$\sigma$  non-dég. (les  $\rho_x$  et  $\lambda_y$  sont bijectives),  $\sigma^2 = \text{Id} \implies$

- ✓  $\Gamma$  bijective ;
- ✓  $\Gamma \sigma_i = \tau_i \Gamma$  où  $\tau(x, y) = (y, x)$  ;
- ✓  $\Gamma$  induit un 1-cocycle de groupes bijectif

$$\Gamma: \text{Grp}(S, \sigma) \xrightarrow{1:1} \text{FA}(S)$$

$$\Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b).$$

Ici  $\text{FA}(S)$  = le groupe abélien libre sur  $S$ .

**Mauvaise nouvelle** : Pas de nouveaux invariants de tresses.

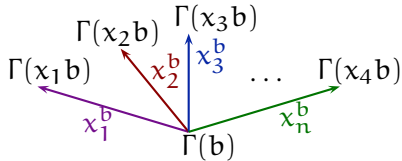
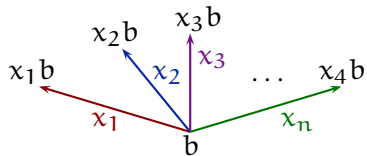
**Bonne nouvelle** : Transport de propriétés.

$$\Gamma: \text{Grp}(S, \sigma) \xrightarrow{1:1} \text{FA}(S)$$

$$\Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b).$$

- ✓ Pour un générateur  $x \in S$ ,  $\Gamma(xb) = \Gamma(x)^b \Gamma(b) = x^b \Gamma(b)$ .
- ✓ Un  $b \in \text{Grp}(S, \sigma)$  permute les générateurs  $x \in S$ .

**Conclusion :** Cayley(FA(S))  $\rightsquigarrow$  recoloriage local Cayley(Grp(S,  $\sigma$ )).



Posons  $G = G(S, \sigma)$ .

- ✓  $\text{Cayley}(G) \curvearrowright G$  par translations à droite.
- ✓ Cette action s'étend à une action  $\mathbb{R}^n \curvearrowright G$  :
  - par transformations euclidiennes ;
  - libre ;
  - domaine fondamental :  $[0, 1]^n$ .

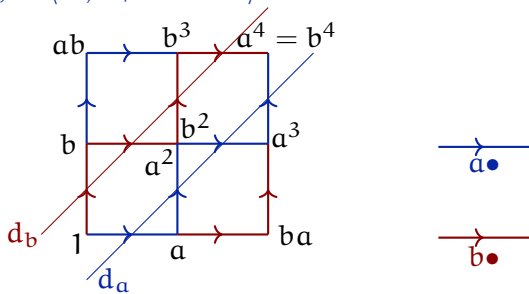
**Conclusion** :  $G$  est un **groupe de Bieberbach**.

$S = \{a, b\}$ ,  $\sigma(x, y) = (f(y), f^{-1}(x))$ , avec  $a \xleftrightarrow{f} b$

i.e.,  $aa \xleftrightarrow{\sigma} bb$ ,  $ab \circ \sigma$ ,  $ba \circ \sigma$

$G := \text{Grp}(S, \sigma) = \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$ .

Cayley(G) :



•  $a$  = réflexion glissée d'axe  $d_a$  et de vecteur  $\frac{1}{2}(1, 1)$

•  $b$  = réflexion glissée d'axe  $d_b$  et de vecteur  $\frac{1}{2}(1, 1)$

•  $a^2 = b^2$  = translation par  $(1, 1)$

$\mathbb{R}^2/G$  = bouteille de Klein

**Théorème** (Chouraqui–Godelle '14, Dehornoy '15) :

$$(S, \sigma) \text{ fini, non-dég., } \sigma^2 = \text{Id} \implies$$

✓ on a une suite exacte courte de groupes

$$0 \rightarrow \text{FA}(S) \xrightarrow{\iota} \text{Grp}(S, \sigma) \rightarrow \overline{\text{Grp}}(S, \sigma) \rightarrow 0,$$

où  $\iota(x) = G^{-1}(x^d)$  pour un  $d$  bien choisi ;

✓ le quotient  $\overline{\text{Grp}}(S, \sigma)$  est fini, et permet de reconstruire  
la structure de Garside de  $\text{Grp}(S, \sigma)$ .