Towards braid-theoretic applications of Laver tables

Victoria LEBED
Joint work with **Patrick DEHORNOY**

Friday Seminar, July 18, 2014

Definition: **Laver table A_n** is the set $\{1, 2, 3, \ldots, 2^n\}$ endowed with the unique binary operation $\triangleright$ satisfying

$$a \triangleright (b \triangleright c) = (a \triangleright b) \triangleright (a \triangleright c), \qquad \text{(SD)}$$

$$a \triangleright 1 \equiv a + 1 \mod 2^n. \qquad \text{(Init)}$$

A_0	1
1	1

A_1	1	2
1	2	2
2	1	2

A_2	1	2	3	4
1	2	4	2	4
2	3	4	3	4
3	4	4	4	4
4	1	2	3	4

A_3	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	2	4	6	8	2	4	6	8	$\pi_3(1) = 4$
2	3	4	7	8	3	4	7	8	$\pi_3(2) = 4$
3	4	8	4	8	4	8	4	8	$\pi_3(3) = 2$
4	5	6	7	8	5	6	7	8	$\pi_3(4) = 4$
5	6	8	6	8	6	8	6	8	$\pi_3(5) = 2$
6	7	8	7	8	7	8	7	8	$\pi_3(6) = 2$
7	8	8	8	8	8	8	8	8	$\pi_3(7) = 1$
8	1	2	3	4	5	6	7	8	$\pi_3(8) = 8$

A_4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16	2	12	14	16
2	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16	3	12	15	16
3	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16	4	8	12	16
4	5	6	7	8	13	14	15	16	5	6	7	8	13	14	15	16
5	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16	6	8	14	16
6	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16	7	8	15	16
7	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16	8	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	9	10	11	12	13	14	15	16
9	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16	10	12	14	16
10	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16	11	12	15	16
11	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16	12	16
12	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16
13	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16	14	16
14	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16	15	16
15	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Figure 1: The first 5 Laver tables

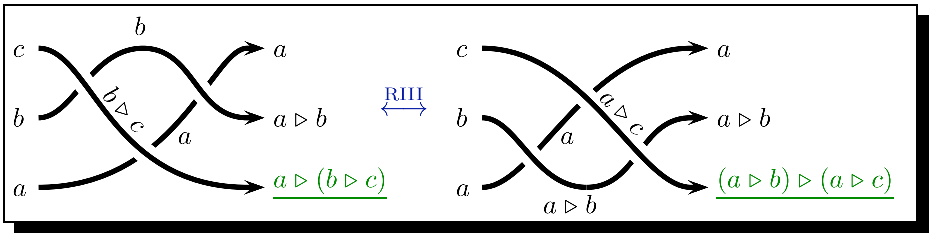

Figure 2: Shelf colorings of a Reidemeister III move

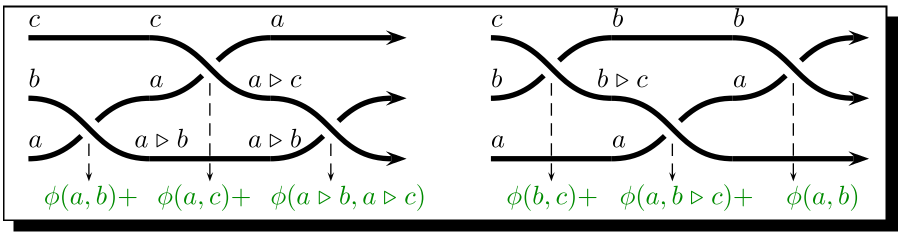

Figure 3: Invariance of ϕ-weight under RIII move

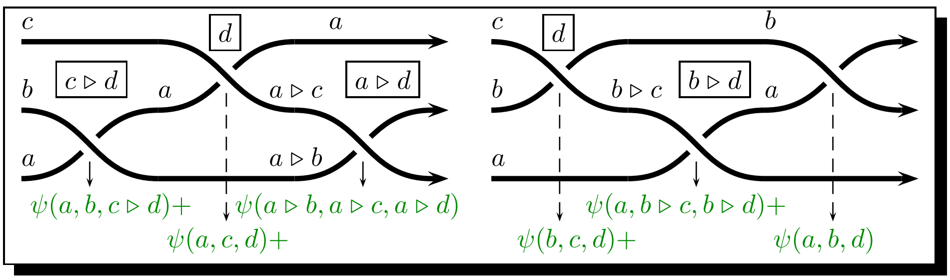

Figure 4: Invariance of ψ-weight under RIII move

Theorem (Dehornoy-L., '14):

2) $\boxed{Z^2_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}^{2^n}}$ basis: $\phi_{const}(a,b) = 1$ and coboundaries

$$\phi_{q,n}(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{if } q \text{ occurs in the column } b, \\ & \text{but not in the column } a \triangleright b \text{ of } A_n, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad 1 \leqslant q < 2^n$$

3) $\boxed{Z^3_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}^{2^{2n}-2^n+1}}$ basis: $\psi_{const}(a,b,c) = 1$ and explicit $\{0, \pm 1\}$-valued coboundaries.

H) $\boxed{H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}}$ $k \leqslant 3$.

Theorem (L., '14):

k) $\boxed{Z^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}^{P_k(2^n)}}$, $P_k(x) = \dfrac{x^k + x^{\alpha(k)}}{x+1}$, $\alpha(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k \text{ is even,} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

H) $\boxed{H^k_{\mathrm{R}}(A_n) \simeq \mathbb{Z}}$ for all k.

$\phi_{1,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	·	·	·	·	·	·
2	1	·	·	·	·	·	·	·
3	1	·	·	·	·	·	·	·
4	1	·	·	·	·	·	·	·
5	1	·	·	·	·	·	·	·
6	1	·	·	·	·	·	·	·
7	1	·	·	·	·	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{2,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	·	1	·	·	·	·	·	·
2	1	1	·	·	1	·	·	·
3	1	1	·	·	1	·	·	·
4	·	1	·	·	·	·	·	·
5	1	1	·	·	1	·	·	·
6	1	1	·	·	1	·	·	·
7	1	1	·	·	1	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{3,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	1	·	1	·	·	·
2	·	·	1	·	·	·	·	·
3	1	·	1	·	1	·	·	·
4	·	·	1	·	·	·	·	·
5	1	·	1	·	1	·	·	·
6	1	·	1	·	1	·	·	·
7	1	·	1	·	1	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{4,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	·	·	·	1	·	·	·	·
2	·	·	·	1	·	·	·	·
3	·	1	·	1	·	1	·	·
4	·	·	·	1	·	·	·	·
5	·	1	·	1	·	1	·	·
6	·	1	·	1	·	1	·	·
7	1	1	1	1	1	1	1	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{5,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	·	·	1	·	·	·
2	1	·	·	·	1	·	·	·
3	1	·	·	·	1	·	·	·
4	·	·	·	·	·	·	·	·
5	1	·	·	·	1	·	·	·
6	1	·	·	·	1	·	·	·
7	1	·	·	·	1	·	·	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{6,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	·	1	·	·	·	1	·	·
2	·	1	·	·	·	1	·	·
3	1	1	1	·	1	1	1	·
4	·	·	·	·	·	·	·	·
5	·	1	·	·	·	1	·	·
6	·	1	·	·	·	1	·	·
7	1	1	1	·	1	1	1	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

$\phi_{7,3}$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	·	1	·	1	·	1	·
2	·	·	·	·	·	·	·	·
3	1	·	1	·	1	·	1	·
4	·	·	·	·	·	·	·	·
5	1	·	1	·	1	·	1	·
6	·	·	·	·	·	·	·	·
7	1	·	1	·	1	·	1	·
8	·	·	·	·	·	·	·	·

Figure 5: Values of $\phi_{q,3}(a,b)$ (here · stands for 0)

Definition: **Right division** relation is given by

$$a \,|_r\, b \quad \Longleftrightarrow \quad b = c \triangleright a \text{ for some } c.$$

Theorem (Dehornoy-L., '14):

1) $|_r$ is a partial ordering for A_n.
2) $a \,|_r\, b \quad \Longleftrightarrow \quad Column(a) \supseteq Column(b)$.
3) $Column(a) \neq Column(b)$ for $a \neq b$.

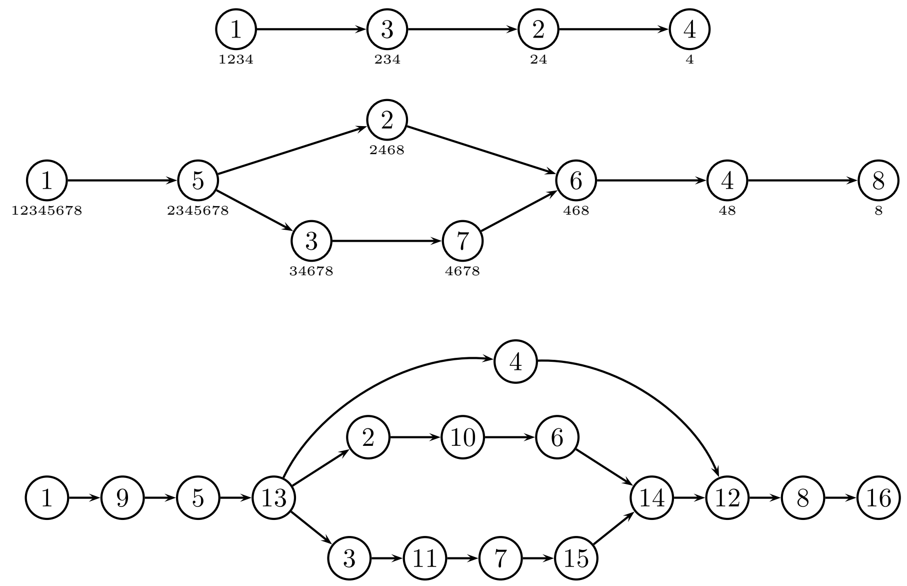

Figure 6: Relation $|_r$ for A_n, $n \leqslant 4$