

Représentations des groupes de tresses:
l'approche homologique de Lawrence vs
l'autodistributivité

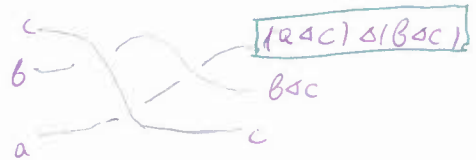
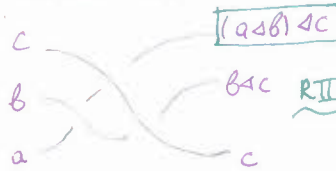
Victoria
LEBED

1) Aperçu historique

- '87, Jones : reps algébriques des algèbres de Hecke H_n
↳ théorie des algèbres de von Neumann
- '90, Lawrence : reps homologiques des H_n
- '94, Long-Moody : une généralisⁿ pour les B_n ;
versions algébrique et homologique
- '00, Krammer & Bigelow : certaines reps de Lawrence sont fidèles
- '02, Krammer, '12, Itad-Uiet
- '08, Bigelow-Tian : généralisⁿ ; cadre entièrement algébrique
- ici : une version combinatoire

2) Tresses et l'auto-distributivité

Coloriages par (S, \triangleleft)



Reps des B_n	Muents de Reidemeister	Axiomes algébriques	Structures algébriques
$S^{*n} \triangleleft B_n^+$	RIII	$(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c)$ l'auto-distributivité	shelf
$S^{*n} \triangleleft B_n$	RII	$\exists \exists t.g. (a \triangleleft b) \triangleleft b = a = (a \triangleleft b) \triangleleft a$	rack
$S \hookrightarrow (S^{*n}) B_n$ $a \mapsto (a, -, a)$	RI	$asa = a$ l'idempotence	quandle

$S^{*n} \ni \bar{a} \in B_n^{(+)} \ni \bar{a} \cdot \beta \in S^{*n}$

Exemples:

	(S, \triangleleft)	
S groupe	$a \triangleleft b$ $b^{-1} a b$	quandle de conjugaison
$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \text{ Mod } \mathbb{Z}$	$t a + (1-t) b$	quandle d'Alexander
\mathbb{Z} shelf	$a + 1$ libre	rack cyclique
$\{1, \dots, 2^k\}$	$1 \triangleleft b = b + 1$	table de Laver (shelf)
?	?	?

donc la théorie des tresses
rep. d'Artin : $B_n \triangleleft F_n$
rep. de Burou : $B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$
eg(w), Ek_{ij} , etc.
ordre sur les B_n
travail en cours (Dehornoy-L.)
rep. de Lawrence-Krammer-Bigelow:
 $B_n \rightarrow GL_{\frac{n(n-1)}{2}}(\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}])$

But: Compléter le tableau.

3) Multi-distributivité tordue twisted

Fixons un groupe G .

G -quandle ^{def}: ensemble S & opérations binaires \triangleleft_g sur S , $g \in G$, t.q.:

$$(1) \boxed{(a \triangleleft_g b) \triangleleft_h c = (a \triangleleft_h c) \triangleleft_{h^{-1}gh} b}$$

(2) $\{a \mapsto a \triangleleft_g b\}$ est une bijection

(3) $a \triangleleft_g a = a$.

Exemple: $S \in \text{Mod } \mathbb{Z}_g \rightsquigarrow G$ -quandle d'Alexander: $\boxed{a \triangleleft_g b = ag + b(1-g)}$

\rightsquigarrow foncteur $\text{Mod } \mathbb{Z}_g \rightarrow G$ -quandles
(avec de bonnes propriétés)

Rmq: \Rightarrow tous les (S, \triangleleft_g) sont des quandles

- $\Leftrightarrow (S \times G, (a, g) \triangleleft (b, h) = (a \triangleleft_h b, h^{-1}gh))$ est un quandle
- on peut parler des G -quandles pour tout shelt G .



Lemme: compatibles avec les mouvements de Reidemeister.

Rmq: marchent bien pour les tresses soudées (welded loop braids), en part. virtuelles.

Rmq: cf. l'équation de Yang-Baxter holonomique (Kashaev-Reshetikhin, Turaev).

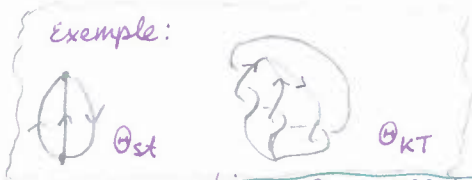
4) Digression : G-familles de quandles

Ishii et al., 2012 : G-famille de quandles = G-quandle $(S, \frac{g_1}{g_2} g_3 g_4)$ t.q.

(4) $(a \underset{g}{\downarrow} b) \underset{h}{\downarrow} c = a \underset{gh}{\downarrow} c$
 (5) $a \underset{g}{\downarrow} b = a$ } i.e., $\begin{cases} G \xrightarrow{\text{monoides}} \text{Bin}(S) \\ G \xrightarrow{t} \Delta \\ \xrightarrow{} \delta \end{cases}$

Exemple : G-quandle d'Alexander.

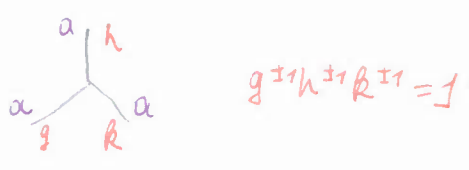
Motivation : Graphes trivalents noués



Kauffman & Yamada & Yetter, '99: 3-graphes \leftrightarrow diagrammes / RI - RVI



Coloriages à double couche:



Lemme : Compatibles avec les mots de Reidemeister
 \rightarrow invariants de 3-graphes.

Rmq : Mieux : invariants de corps à anses noués.

5) "quasi-représentations" des B_n

Soit $(S, \{g_i\}_{g_i \in G})$ un G -quandle.

Pour tout $\bar{g} \in G^{*n}$, on a une application $\psi_{\bar{g}}: B_n \rightarrow \text{Aut}(S^{*n})$:

$$\begin{array}{l} S^{*n} \ni \bar{a} \\ G^{*n} \ni \bar{g} \end{array} \quad \left[\begin{array}{l} \beta \in B_n \\ \bar{g} \cdot \beta \in G^{*n} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \boxed{\bar{a} \cdot \psi_{\bar{g}}(\beta)} \in S^{*n} \\ \bar{g} \cdot \beta \in G^{*n} \end{array}$$

Lemme: $\psi_{\bar{g}}(\beta \beta') = \psi_{\bar{g}}(\beta) \psi_{\bar{g}}(\beta')$

Question: En déduire une vraie rep. de B_n ?

Réponse dans un cas particulier:

$$\rightarrow G = F_n, \bar{g}^* = (\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{\text{générateurs}}) \Rightarrow \bar{g}^* \cdot \beta = (\beta(x_1), \dots, \beta(x_n))$$

\uparrow rep. d'Artin.

$$\rightarrow S \text{ est un } G\text{-quandle d'Alexander} \Rightarrow \psi_{\bar{g}}: B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}\langle G \rangle)$$

Thm: Dans cette situation, on a un morphisme de groupe

$$\begin{array}{l} \psi: B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}\langle F_n \rangle) \rtimes B_n \\ \beta \mapsto (\psi_{\bar{g}^*}(\beta), \beta) \end{array}$$

$$\square (\psi_{\bar{g}^*}(\beta \beta'), \beta \beta') \stackrel{\text{Lemme}}{=} (\psi_{\bar{g}^*}(\beta) \psi_{\bar{g}^*}(\beta'), \beta \beta') = (\psi_{\bar{g}^*}(\beta), (\beta \cdot \psi_{\bar{g}^*}(\beta'))) = (\psi_{\bar{g}^*}(\beta), \beta) (\psi_{\bar{g}^*}(\beta'), \beta')$$

$= (\beta(x_1), \beta(x_n))$

6) Construction de Long-Moody

$$\text{Crel: } \begin{array}{l} p: F_n \rtimes B_n \rightarrow \text{Aut}(V) \\ \downarrow \psi^* \\ p^*: B_n \rightarrow \text{Aut}(V^{\otimes n}) \end{array}$$

Pourquoi s'intéresser à cette construction bizarre?

$\rightarrow F_n \rtimes B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ de plusieurs façons \Rightarrow on peut partir de $B_{n+1} \xrightarrow{p} \text{Aut}(V)$

E.g. $\begin{array}{c} \boxed{\square} \mapsto \boxed{\square} \\ x_i \mapsto \boxed{x_i} \end{array}$

$\rightarrow p^*$ est souvent plus riche que p :

- rep. triviale de $B_{n+1} \rightsquigarrow$ rep. de Burou de B_n
- $\text{---} P_{n+1} \rightsquigarrow \text{---}$ Gassner de P_n & homotétie
- $\text{---} B_2 \rightsquigarrow \text{---}$ Lawrence-Krammer & shift & homotétie 'itérations' de B_n

\rightarrow calculs explicites:

$$\psi(\zeta_i) = \left(\begin{array}{cccc} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{i+1} & 0 \\ 0 & 1 & 1-x_{i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{array} \right), \zeta_i$$

- $\zeta_i x_i = x_{i+1} \zeta_i$
- $\zeta_i x_{i+1} = x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} \zeta_i$
- $\zeta_i x_j = x_j \zeta_i, j \notin \{i, i+1\}$

7) Version réduite

$$\rho : \mathbb{Z} F_n \rtimes B_n \rightarrow \text{Aut}(V) \xrightarrow{\mathcal{U}_*} \rho^+ : B_n \rightarrow \text{Aut}(V^{\oplus n})$$

$$V \hookrightarrow V^{\oplus n}$$

$$a \longmapsto (a, \dots, a)$$

$$\rho|_{B_n} \longleftrightarrow \rho^+$$

Mieux: $\rho^+ = \rho_{B_n} \oplus \rho^+_{\text{red}}$

cf. la rep. de Burau réduite.

Qu.: Une interprétation distributive de ρ^+_{red} ?

8) À suivre...

→ Extraire de l'info topologique ?

Motivation: Krammer '02, Ito-Wiest '12 : longueurs de Garside classique et duale en termes de matrices de Lawrence.

→ Une relation "pseudo-Hecke" dans $\text{Mat}_n(\mathbb{Z} F_n \rtimes B_n)$:

$$(\psi(\beta_i) + (\gamma_{i+1}, \beta_i))(\psi(\beta_i) - (1, \beta_i)) = 0$$

Vrai Hecke ?

→ D'autres exemples de G -quandles & reps des B_n associées ?