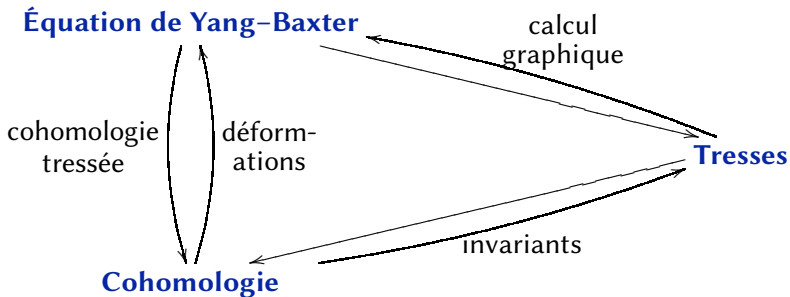


Un triangle d'or

Victoria LEBED, Caen



Montpellier, Avril 2019

Données : espace vectoriel V , $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$.

L'équation de Yang-Baxter (YBE)

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_V, \sigma_2 = \text{Id}_V \otimes \sigma$$

Avatars :

- condition de factorisation pour la matrice de dispersion dans le **problème de n corps en dim. 1** (*McGuire & Yang 60'*);
- condition sur la fonction de partition dans un **modèle sur réseau** exactement résoluble (*Onsager '44; Baxter 70'*);
- S-matrices factorisables dans les **QFT de dim. 2** (*Zamolodchikov '79*);
- R-matrices dans les **groupes quantiques** (*Drinfel'd 80'*);
- **C^* -algèbres** (*Woronowicz 80'*);
-

1

L'équation de Yang-Baxter 101

Données : espace vectoriel V , $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$.

L'équation de Yang-Baxter (YBE)

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_V, \sigma_2 = \text{Id}_V \otimes \sigma$$

Avatars :

→ équation de tresses

$$\sigma \longleftrightarrow \text{Diagram of a crossing} \quad \uparrow$$

$$\text{YBE} \longleftrightarrow \text{Diagram of two crossings} = \text{Diagram of two crossings} \quad \text{Reidemeister III}$$

2 Tressages

Données : ensemble S , $\sigma: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$.

YBE ensembliste (Drinfel'd '90)

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: S^{\times 3} \rightarrow S^{\times 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \times \text{Id}_S, \sigma_2 = \text{Id}_S \times \sigma$$

Tressage = solution de l'YBE ensembliste.

tressage $\xrightarrow{\text{linéariser}}$ $\xrightarrow{\text{déformer}}$ solutions linéaire

Exemples :

- ✓ $\sigma(x, y) = (y, x) \rightsquigarrow$ R-matrices;
- ✓ algèbre de Lie $(V, [])$, élément central $1 \in V$,
 $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y]$.

$$\text{YBE pour } \sigma \iff \text{Jacobi pour } []$$

✓ ensemble S , opération binaire \triangleleft , $\sigma(x, y) = (y, x \triangleleft y)$

YBE pour $\sigma \iff$ auto-distributivité pour \triangleleft

Auto-distributivité : $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$

Exemples :

→ groupe S avec $x \triangleleft y = y^{-1}xy$ donne un quandle : (AD)
 & $\forall y, x \mapsto x \triangleleft y$ est une bijection
 & $x \triangleleft x = x$;

$$z^{-1}(y^{-1}xy)z = (z^{-1}y^{-1}z)(z^{-1}xz)(z^{-1}yz)$$

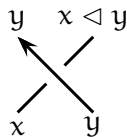
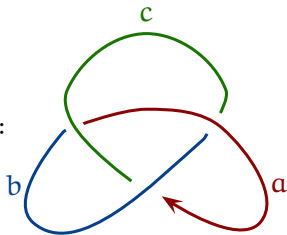
→ groupe abélien S , $t: S \rightarrow S$, $a \triangleleft b = ta + (1 - t)b$.

Applications :

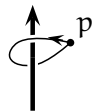
→ invariants de nœuds et de surfaces nouées (*Joyce & Matveev '82*);

(S, \triangleleft) -coloriages

de diagrammes de nœuds :



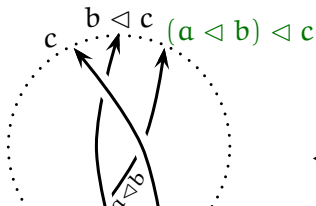
cf. présentation
de Wirtinger
de $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$:



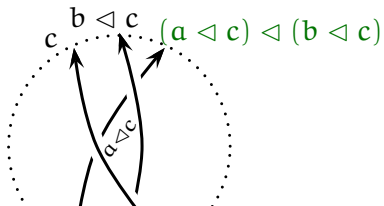
Proposition : (S, \triangleleft) est un quandle \implies

$\#\{(S, \triangleleft)\text{-coloriages d'un diagramme}\}$

est un invariant de nœuds.



RIII



✓ ensemble S , opération binaire \triangleleft , $\sigma(x, y) = (y, x \triangleleft y)$

YBE pour $\sigma \iff$ auto-distributivité pour \triangleleft

Auto-distributivité : $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$

Applications :

- invariants de nœuds et de surfaces nouées (*Joyce & Matveev '82*);
- un ordre total sur les groupes de tresses (*Dehornoy '91*);
- classification des algèbres de Hopf (*Andruskiewitsch–Graña '03*);
- intégration des algèbres de Leibniz (*Kinyon '07*);
- étude de tressages (*L.–Vendramin '16*).

✓ monoïde $(S, *, 1)$, $\sigma(x, y) = (1, x * y)$;

YBE pour $\sigma \iff$ associativité pour $*$

✓ monoïde factorisé $G = HK$,

$S = H \cup K$, $\sigma(x, y) = (h, k)$, $h \in H, k \in K, hk = xy$;

✓ réseau (S, \wedge, \vee) , $\sigma(x, y) = (x \wedge y, x \vee y)$;

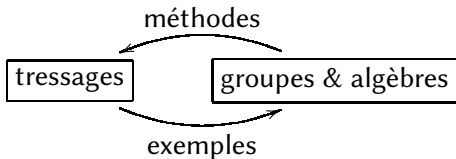
✓ monoïde plaxique.

Ces tressages sont idempotents : $\sigma^2 = \sigma$.

Monoïde enveloppant universel :

$$\text{Mon}(S, \sigma) = \langle S \mid xy = y'x' \text{ où } x, y \in S, (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$$

Les groupes et algèbres e.u. sont définis de la même manière.



Théorème : (S, σ) est un “bon” tressage fini, $\sigma^2 = \text{Id} \implies$

- ✓ $\text{Mon}(S, \sigma)$ est du type I, simplifiable, Ore;
- ✓ $\text{Grp}(S, \sigma)$ est résoluble, Garside;
- ✓ $\mathbb{k} \text{Mon}(S, \sigma)$ est Koszul, noethérienne, Cohen–Macaulay, Artin–Schelter régulière

(Manin, Gateva-Ivanova & Van den Bergh, Etingof– Schedler–Soloviev, Jespers–Okniński, Chouraqui 80’-...).

Monoïde enveloppant universel :

$$\text{Mon}(S, \sigma) = \langle S \mid xy = y'x' \text{ où } x, y \in S, (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$$

Exemples :

✓ monoïde $(S, *, 1)$, $\sigma(x, y) = (1, x * y)$,

$$S \simeq \text{Mon}(S, \sigma) / 1_S = 1_{\text{Mon}};$$

✓ algèbre de Lie $(V, [], 1)$, $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y]$,

$$\text{UEA}(V, []) \simeq \mathbb{k} \text{Mon}(S, \sigma) / 1 = 1_{\text{Mon}}.$$

$$\text{Mon}(S, \sigma) = \langle S \mid xy = y'x' \text{ où } x, y \in S, (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$$

Représentations de (S, σ) := représentations de $\mathbb{k} \text{Mon}(S, \sigma)$,

i.e. e.v. M avec $M \times S \rightarrow M$ t.q.

$$(m \cdot x) \cdot y = (m \cdot y') \cdot x'$$

Exemples :

- rép. triviale : $M = \mathbb{k}$, $m \cdot x = m$;
- $M = \mathbb{k} \text{Mon}(S, \sigma)$, $m \cdot x = mx$;
- réps usuelles de monoïdes, algèbres de Lie, structures AD.

Une théorie cohomologique pour les tressages devrait :

1) Décrire les **déformations** : $\sigma_0 \rightsquigarrow \sigma_0 + \hbar\sigma_1 + \hbar^2\sigma_2 + \dots$.

Difficile! Pionniers : *Freyd–Yetter '89, Eisermann '05.*

Premier pas : **déformations diagonales**

$$\sigma_q(x, y) = q^{\omega(x, y)} \sigma(x, y), \quad \omega: S \times S \rightarrow \mathbb{Z}.$$

ω est un 2-cocycle $\implies \sigma_q$ est un tressage.

2) Donner des **invariants de nœuds et de surfaces nouées** (*Carter et al. '01*) :

diagramme (S, σ) -coloriés (D, \mathcal{C}) & $\omega: S \times S \rightarrow \mathbb{Z}$

$$\rightsquigarrow \text{ poids de Boltzmann } \mathcal{B}_\omega(\mathcal{C}) = \sum_{\begin{array}{c} y' \diagdown x' \\ x \diagup y \end{array}} \omega(x, y) - \sum_{\begin{array}{c} x \diagdown y \\ y' \diagup x' \end{array}} \omega(x, y).$$

ω est un 2-cocycle \implies invariant de nœuds

$$\{ \mathcal{B}_\omega(\mathcal{C}) \mid \mathcal{C} \text{ est un } (S, \sigma)\text{-coloriage de } D \}.$$

Une théorie cohomologique pour les tressages devrait :

3) **Unifier** les théories cohomologiques pour

- algèbres associatives,
- algèbres de Lie,
- structures auto-distributives etc.

+ expliquer des phénomènes communs (*L. '13*),

+ suggérer des théories pour des structures nouvelles (*L.-Vendramin '16*).

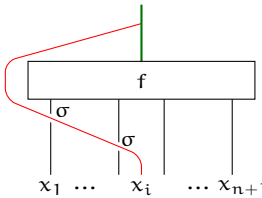
4) Élucider la **cohomologie de $\mathbb{k} \text{Mon}(S, \sigma)$** .

Données : tressage (S, σ) & un (S, σ) -bimodule M .

Construction :

$$C^n(S, \sigma; M) = \text{Maps}(S^{\times n}, M),$$

$$d^n = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} (d_l^{n;i} - d_r^{n;i}): C^n \rightarrow C^{n+1},$$

$$d_l^{n;i} f: \begin{array}{c} x'_i \cdot f(x'_1 \dots x'_{i-1} x_{i+1} \dots x_{n+1}) \\ \uparrow \\ x'_i x'_1 \dots x'_{i-1} x_{i+1} \dots x_{n+1} \\ \uparrow \\ \sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \\ x_1 \dots x_{n+1} \end{array}$$


Théorème : $\rightarrow d^{n+1} d^n = 0$;

$H^n(S, \sigma; M) = \text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n-1}$ est le n-ième groupe de cohomologie de (S, σ) à coefficients dans M ;

- \rightarrow pour certains M , un cup produit $\smile: H^n \otimes H^m \rightarrow H^{n+m}$;
- \rightarrow d'autres bonnes propriétés.

- 1) & 2) Pour $\omega \in C^2(S, \sigma; \mathbb{Z})$,
 $d^2\omega = 0 \implies \omega$ fournit des poids de Boltzmann
 & des déformations diagonales,
 $\omega = d^1\theta \implies$ ces poids/déformations sont triviaux.
- 3) Unifie des théories cohomologiques classiques.

Exemple : monoïde $(S, *, 1)$, $\sigma(x, y) = (1, x * y)$,

$$\begin{aligned}
 d_1^{n,i}f: & \quad \dots x_{i-2} \underline{x_{i-1} x_i} x_{i+1} \dots \xrightarrow{\sigma_{i-1}} \\
 & \quad \dots \underline{x_{i-2} 1} (x_{i-1} * x_i) x_{i+1} \dots \xrightarrow{\sigma_{i-2}} \\
 & \quad \dots \underline{1} x_{i-2} (x_{i-1} * x_i) x_{i+1} \dots \longrightarrow \dots \\
 & \quad \underline{1} x_1 \dots x_{i-2} (x_{i-1} * x_i) x_{i+1} \dots \longrightarrow \\
 & \quad f(\dots x_{i-2} (x_{i-1} * x_i) x_{i+1} \dots).
 \end{aligned}$$

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée de
(S, σ) à coefs dans M

cup produit

complexes plus petits

$\xleftarrow{\mathcal{QS}}$

cohomologie de Hochschild de
 $\mathbb{k} \text{ Mon}(S, \sigma)$ à coefs dans M

cup produit

outils

\mathcal{QS} est un iso quand

- $\sigma\sigma = \text{Id}$ et $\text{Char } \mathbb{k} = 0$ (*Farinati & García-Galofre '16*);
- $\sigma\sigma = \sigma$ (*L. '16*).

Applications : monoïdes factorisés, tableaux de Young.

Problème ouvert : comprendre \mathcal{QS} en général?

- 1) calcul graphique;
- 2) cogèbres de battage quantiques;
- 3) tressage \rightsquigarrow une bigèbre différentielle graduée;
- 4) cohomologie cubique.

Conjecture : cohomologie **tressée** = cohomologie **cubique**.

Théorème : cohomologie de **Hochschild** = cohomologie **simpliciale**
(Gerstenhaber–Schack '83).