

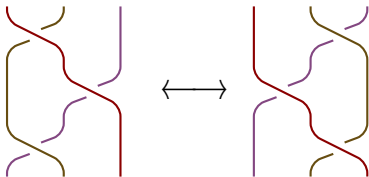
Que savent les tresses sur les tableaux de Young ?

Victoria LEBED

Trinity College Dublin

IRIF, 21 décembre 2016

3		
2	6	6
1	4	5



1

Tableaux de Young

3		
2	6	6
1	4	5

1

Tableaux de Young

3		
2	6	6
1	4	5

+ Gadget combinatoire

(*Young* 1900, *Frobenius* 1903).

3		
2	6	6
1	4	5

- + Gadget combinatoire
(*Young* 1900, *Frobenius* 1903).
- + Monoïde ($\mathbf{TY}_n, *$), $A_n = \{1, \dots, n\}$
(*Robinson* '38, *Schensted* '61, *Knuth* '70).

3		
2	6	6
1	4	5

+ Gadget combinatoire

(*Young* 1900, *Frobenius* 1903).

+ Monoïde ($\mathbf{TY}_n, *$), $A_n = \{1, \dots, n\}$

(*Robinson* '38, *Schensted* '61, *Knuth* '70).

Applications :

- ✓ Règle de Littlewood–Richardson : une preuve correcte!
(*Schützenberger* '77)
 - + représentations de S_k et $GL_k(\mathbb{C})$;
 - + intersections de grassmanniennes ;
 - + produit de fonctions symétriques.

3		
2	6	6
1	4	5

+ Gadget combinatoire

(*Young* 1900, *Frobenius* 1903).

+ Monoïde ($\mathbf{TY}_n, *$), $A_n = \{1, \dots, n\}$

(*Robinson* '38, *Schensted* '61, *Knuth* '70).

Applications :

✓ Règle de Littlewood–Richardson : une preuve correcte!

(*Schützenberger* '77)

- + représentations de S_k et $GL_k(\mathbb{C})$;
- + intersections de grassmanniennes ;
- + produit de fonctions symétriques.

✓ Polynômes de Kostka–Foulkes

(*Lascoux–Schützenberger* '78)

- + représentations de $GL_k(F_q)$;
- + modèles sur réseau.

3		
2	6	6
1	4	5

+ Gadget combinatoire

(*Young* 1900, *Frobenius* 1903).

+ Monoïde $(\mathbf{TY}_n, *)$, $A_n = \{1, \dots, n\}$

(*Robinson* '38, *Schensted* '61, *Knuth* '70).

Applications :

✓ Règle de Littlewood–Richardson : une preuve correcte!

(*Schützenberger* '77)

- + représentations de S_k et $GL_k(\mathbb{C})$;
- + intersections de grassmanniennes ;
- + produit de fonctions symétriques.

✓ Polynômes de Kostka–Foulkes

(*Lascoux–Schützenberger* '78)

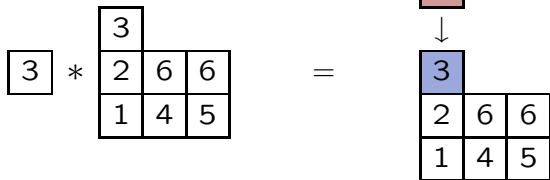
- + représentations de $GL_k(F_q)$;
- + modèles sur réseau.

✓ Bases cristallines pour les groupes quantiques (90').

$$\boxed{3} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & 6 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} =$$

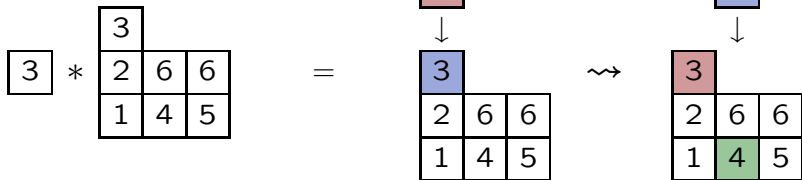
2

Algorithmes de Schensted



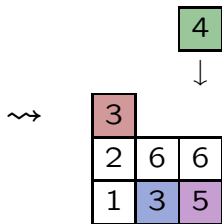
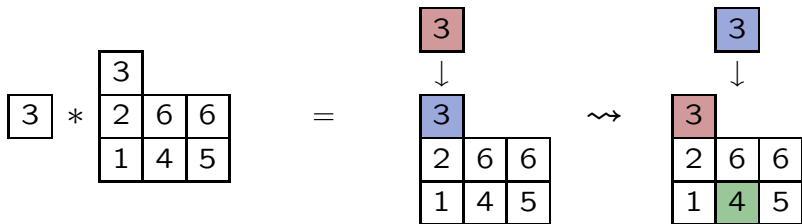
2

Algorithmes de Schensted

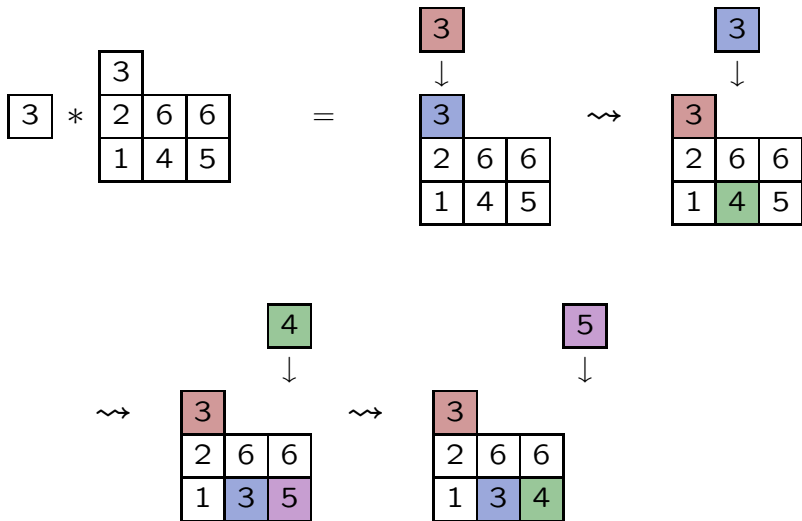


2

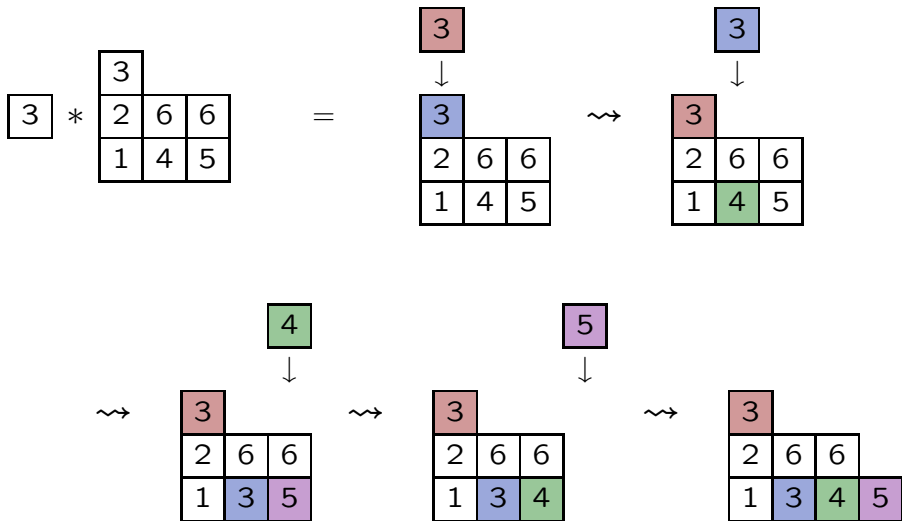
Algorithme de Schensted



2 Algorithm de Schensted



2 Algorithmme de Schensted



3 Monoïde plaxique

Tableaux vs. mots : $\mathcal{C}, \mathcal{L} : \mathbf{TY}_n \rightleftharpoons A_n^* : \mathcal{T}$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & 6 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \xrightarrow{\mathcal{C}} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3\ 266\ 145 \\ 321\ 64\ 65 \end{array}$$

$$\boxed{a_1} * (\boxed{a_2} * (\dots * \boxed{a_k})) \quad \xleftarrow{\mathcal{T}} \quad a_1 a_2 \dots a_k$$

3 Monoïde plaxique

Tableaux vs. mots : $\mathcal{C}, \mathcal{L} : \mathbf{TY}_n \rightleftharpoons A_n^* : \mathcal{T}$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & 6 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\mathcal{L}} \\ \xrightarrow{\mathcal{C}} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3\ 266\ 145 \\ 321\ 64\ 65 \end{array}$$

$$\boxed{a_1} * (\boxed{a_2} * (\dots * \boxed{a_k})) \quad \xleftarrow{\mathcal{T}} \quad a_1 a_2 \dots a_k$$

Thm (Knuth '70) : $\mathcal{C}, \mathcal{L} : (\mathbf{TY}_n, *) \xrightarrow{\text{iso}} (A_n^*/\sim, \text{concat}) : \mathcal{T}$

$$xzy \sim zxy, \quad x \leq y < z;$$

$$yxz \sim yzx, \quad x < y \leq z.$$

3

Monoïde plaxique

Tableaux vs. mots : $\mathcal{C}, \mathcal{L} : \mathbf{TY}_n \rightleftharpoons A_n^* : \mathcal{T}$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & & \\ \hline 2 & 6 & 6 \\ \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \quad 3 \ 266 \ 145$$

$$\xrightarrow{\mathcal{C}} \quad 321 \ 64 \ 65$$

$$\boxed{a_1} * (\boxed{a_2} * (\dots * \boxed{a_k}))$$

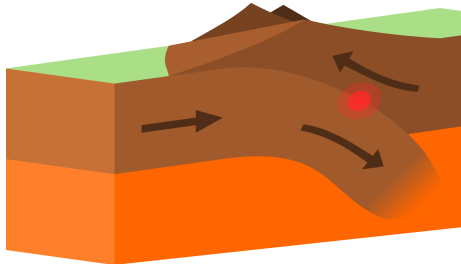
$$\xleftarrow{\mathcal{T}} \quad a_1 a_2 \dots a_k$$

Thm (Knuth '70) : $\mathcal{C}, \mathcal{L} : (\mathbf{TY}_n, *) \xleftrightarrow{\text{iso}} (A_n^*/\sim, \text{concat}) : \mathcal{T}$

= \mathbf{PL}_n monoïde
plaxique

$$xzy \sim zxy, \quad x \leq y < z;$$

$$yxz \sim yzx, \quad x < y \leq z.$$



4

Réécriture pour \mathbf{PL}_n

$$\mathbf{PL}_n = \langle A_n \mid xzy = zxy, x \leq y < z; yxz = yzx, x < y \leq z \rangle$$

$\mathbf{PL}_n = \langle A_n \mid xzy = zxy, x \leq y < z; yxz = yzx, x < y \leq z \rangle$

\mathbf{Col}_n^\bullet := tableaux-colonnes = mots-colonnes (non-vides).

Lemme : $c_1 * c_2$ a + soit 1 colonne $c_1 c_2$ (concaténation),
+ soit 2 colonnes c'_1, c'_2 .

$\mathbf{PL}_n = \langle A_n \mid xzy = zxy, x \leq y < z; yxz = yzx, x < y \leq z \rangle$

\mathbf{Col}_n^\bullet := tableaux-colonnes = mots-colonnes (non-vides).

Lemme : $c_1 * c_2$ a + soit 1 colonne $c_1 c_2$ (concaténation),
+ soit 2 colonnes c'_1, c'_2 .

Thm (Cain et al., Bokut et al., '15) :

$$\mathbf{PL}_n = \langle \mathbf{Col}_n^\bullet \mid c_1 \cdot c_2 = c_1 c_2 \text{ ou } c'_1 \cdot c'_2 \rangle$$

$\mathbf{PL}_n = \langle A_n \mid xzy = zxy, x \leq y < z; yxz = yzx, x < y \leq z \rangle$

\mathbf{Col}_n^\bullet := tableaux-colonnes = mots-colonnes (non-vides).

Lemme : $c_1 * c_2$ a + soit 1 colonne $c_1 c_2$ (concaténation),
+ soit 2 colonnes c'_1, c'_2 .

Thm (*Cain et al., Bokut et al., '15*) :

$$\mathbf{PL}_n = \langle \mathbf{Col}_n^\bullet \mid c_1 \cdot c_2 \rightarrow c_1 c_2 \text{ ou } c'_1 \cdot c'_2 \rangle$$

+ système de réécriture convergent

$$\mathbf{NForme}(c_1 \cdot \dots \cdot c_k) = \mathcal{C}(c_1 * \dots * c_k);$$

$\mathbf{PL}_n = \langle A_n \mid xzy = zxy, x \leq y < z; yxz = yzx, x < y \leq z \rangle$

\mathbf{Col}_n^\bullet := tableaux-colonnes = mots-colonnes (non-vides).

Lemme : $c_1 * c_2$ a + soit 1 colonne $c_1 c_2$ (concaténation),
+ soit 2 colonnes c'_1, c'_2 .

Thm (*Cain et al., Bokut et al., '15*) :

$$\mathbf{PL}_n = \langle \mathbf{Col}_n^\bullet \mid c_1 \cdot c_2 \rightarrow c_1 c_2 \text{ ou } c'_1 \cdot c'_2 \rangle$$

+ système de réécriture convergent

$$\text{NForme}(c_1 \cdot \dots \cdot c_k) = \mathcal{C}(c_1 * \dots * c_k);$$

+ base de Gröbner–Shirshov pour $\mathbb{k}\mathbf{PL}_n$.

$\mathbf{PL}_n = \langle A_n \mid xzy = zxy, x \leq y < z; yxz = yzx, x < y \leq z \rangle$

\mathbf{Col}_n^\bullet := tableaux-colonnes = mots-colonnes (non-vides).

Lemme : $c_1 * c_2$ a + soit 1 colonne $c_1 c_2$ (concaténation),
+ soit 2 colonnes c'_1, c'_2 .

Thm (Cain et al., Bokut et al., '15) :

$$\mathbf{PL}_n = \langle \mathbf{Col}_n^\bullet \mid c_1 \cdot c_2 \rightarrow c_1 c_2 \text{ ou } c'_1 \cdot c'_2 \rangle$$

+ système de réécriture convergent

$$\mathbf{NForme}(c_1 \cdot \dots \cdot c_k) = \mathcal{C}(c_1 * \dots * c_k);$$

+ base de Gröbner–Shirshov pour $\mathbb{k}\mathbf{PL}_n$.

Exemple : $\mathbf{Col}_2^\bullet = \left\{ \boxed{1}, \boxed{2}, \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \right\},$

$$\boxed{2} \cdot \boxed{1} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}, \quad \boxed{i} \cdot \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \cdot \boxed{i}.$$

5

Les tresses dans tout cela ?

$\mathbf{Col}_n := \mathbf{Col}_n^\bullet \sqcup e_C$ (colonne vide)

5

Les tresses dans tout cela ?

$\mathbf{Col}_n := \mathbf{Col}_n^\bullet \sqcup e_C$ (colonne vide)

$\sigma_{n,C} : \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n \rightarrow \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n,$

$(c_1, c_2) \mapsto (c_1 c_2, e_C)$ ou $(c'_1, c'_2) = c_1 * c_2.$

$\mathbf{Col}_n := \mathbf{Col}_n^\bullet \sqcup e_C$ (colonne vide)

$\sigma_{n,C} : \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n \rightarrow \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n,$

$(c_1, c_2) \mapsto (c_1 c_2, e_C)$ ou $(c'_1, c'_2) = c_1 * c_2.$

Thm (L. '16) :

- + $\sigma_{n,C}$ est un **tressage idempotent** sur \mathbf{Col}_n ;
- + e_C est un **neutre** pour $\sigma_{n,C}$;
- + $\mathbf{PL}_n \simeq \mathbf{Mon}(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C)$;

$\mathbf{Col}_n := \mathbf{Col}_n^\bullet \sqcup e_C$ (colonne vide)

$\sigma_{n,C} : \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n \rightarrow \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n,$

$(c_1, c_2) \mapsto (c_1 c_2, e_C)$ ou $(c'_1, c'_2) = c_1 * c_2.$

Thm (L. '16) :

- + $\sigma_{n,C}$ est un **tressage idempotent** sur \mathbf{Col}_n ;
- + e_C est un **neutre** pour $\sigma_{n,C}$;
- + $\mathbf{PL}_n \simeq \mathbf{Mon}(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C)$;
- + idem pour les tableaux-lignes.

$\mathbf{Col}_n := \mathbf{Col}_n^\bullet \sqcup e_C$ (colonne vide)

$\sigma_{n,C} : \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n \rightarrow \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n,$

$(c_1, c_2) \mapsto (c_1 c_2, e_C)$ ou $(c'_1, c'_2) = c_1 * c_2.$

Thm (L. '16) :

+ $\sigma_{n,C}$ est un **tressage idempotent** sur \mathbf{Col}_n ;

+ e_C est un **neutre** pour $\sigma_{n,C}$;

+ $\mathbf{PL}_n \simeq \mathbf{Mon}(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C)$;

+ idem pour les tableaux-lignes.

Motivation : \mathbf{Col}_n est plus petit et plus simple que \mathbf{PL}_n .

$\mathbf{Col}_n := \mathbf{Col}_n^\bullet \sqcup e_C$ (colonne vide)

$\sigma_{n,C} : \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n \rightarrow \mathbf{Col}_n \times \mathbf{Col}_n,$

$(c_1, c_2) \mapsto (c_1 c_2, e_C)$ ou $(c'_1, c'_2) = c_1 * c_2.$

Thm (L. '16) :

+ $\sigma_{n,C}$ est un **tressage idempotent** sur \mathbf{Col}_n ;

+ e_C est un **neutre** pour $\sigma_{n,C}$;

+ $\mathbf{Pl}_n \simeq \mathbf{Mon}(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C)$;

+ idem pour les tableaux-lignes.

Motivation : \mathbf{Col}_n est plus petit et plus simple que \mathbf{Pl}_n .

Applications : + réécriture ;

+ calculs cohomologiques (cf. *Lopatkin '16*).

Données :

- + catégorie monoïdale \mathcal{C} ($= \mathbf{Vect}_k$);
- + objet S ;
- + morphisme $\sigma: S \otimes S \rightarrow S \otimes S$.

YBE :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: S^{\otimes 3} \rightarrow S^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_S, \quad \sigma_2 = \text{Id}_S \otimes \sigma$$

Données :

- + catégorie monoïdale \mathcal{C} ($= \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$) ;
- + objet S ;
- + morphisme $\sigma: S \otimes S \rightarrow S \otimes S$.

tressage

YBE :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: S^{\otimes 3} \rightarrow S^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_S, \quad \sigma_2 = \text{Id}_S \otimes \sigma$$

Avatar topologique :

$$\sigma \leftrightarrow \text{tressage simple} \quad \uparrow$$

$$\text{YBE} \leftrightarrow \text{tressage compliqué} = \text{tressage compliqué} \quad \text{mouvement de Reidemeister III}$$



Tressages exotiques

① Ensemblistes : $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ (*Drinfel'd '90*)



Tressages exotiques

① Ensembles : $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ (*Drinfel'd '90*)

linéariser



déformer



solutions linéaires



Tressages exotiques

① Ensembles : $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ (Drinfel'd '90)

linéariser déformer
  solutions linéaires

Exemple : $\sigma(x, y) = (y, x)$

\rightsquigarrow R -matrices ;



Tressages exotiques

① Ensembles : $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ (Drinfel'd '90)

linéariser déformer
~~~~~>      ~~~~~>      solutions linéaires

Exemple :  $\sigma(x, y) = (y, x)$

~>  $R$ -matrices ;

~>  $\sigma_{Lie}(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y] :$

YBE pour  $\sigma_{Lie}$   $\stackrel{1 \text{ central}}{\iff}$  Jacobi pour []

① Ensemblistes :  $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$  (Drinfel'd '90)

linéariser      déformer  
  solutions linéaires

**Exemple** :  $\sigma(x, y) = (y, x)$

$\rightsquigarrow$   $R$ -matrices ;

$\rightsquigarrow$   $\sigma_{Lie}(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y]$  :

YBE pour  $\sigma_{Lie}$   $\overset{1}{\iff}$  central Jacobi pour  $[\ ]$

## ② Non-inversibles.

**Exemple** : structures auto-distributives &  
 un ordre sur les groupes de tresses (Dehornoy '91).



## Tressages exotiques

① **Ensemblistes** :  $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$  (*Drinfel'd '90*)

linéariser      déformer  
~~~~~>      ~~~~~>      solutions linéaires

Exemple : $\sigma(x, y) = (y, x)$

~> R -matrices ;

~> $\sigma_{Lie}(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y]$:

YBE pour σ_{Lie} $\stackrel{1 \text{ central}}{\iff}$ Jacobi pour $[\]$

② **Non-inversibles**.

Exemple : structures auto-distributives &
un ordre sur les groupes de tresses (*Dehornoy '91*).

③ **Idempotents** : $\sigma\sigma = \sigma$.

✓ Monoïde $(S, \cdot, 1)$, $\sigma_{Ass}(x, y) = (1, x \cdot y)$.

YBE pour σ_{Ass} \iff associativité pour \cdot
1 neutre

- ✓ Monoïde $(S, \cdot, 1)$, $\sigma_{Ass}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

YBE pour σ_{Ass} \iff associativité pour \cdot
 1 neutre

- ✓ Monoïde factorisé $G = HK$,
 $S = H \cup K$, $\sigma_{Fact}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((\mathbf{x}\mathbf{y})_H, (\mathbf{x}\mathbf{y})_K)$.

- ✓ Monoïde $(S, \cdot, 1)$, $\sigma_{Ass}(x, y) = (1, x \cdot y)$.

YBE pour σ_{Ass} $\stackrel{1 \text{ neutre}}{\iff}$ associativité pour \cdot

- ✓ Monoïde factorisé $G = HK$,
 $S = H \cup K$, $\sigma_{Fact}(x, y) = ((xy)_H, (xy)_K)$.
- ✓ Treillis (S, \wedge, \vee) , $\sigma_{Tr}(x, y) = (x \wedge y, x \vee y)$.

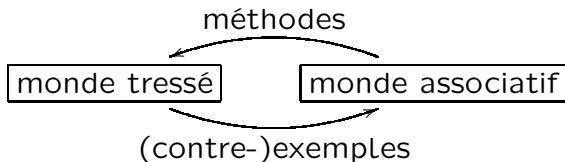
- ✓ Monoïde $(S, \cdot, 1)$, $\sigma_{Ass}(x, y) = (1, x \cdot y)$.

YBE pour σ_{Ass} $\stackrel{1 \text{ neutre}}{\iff}$ associativité pour \cdot

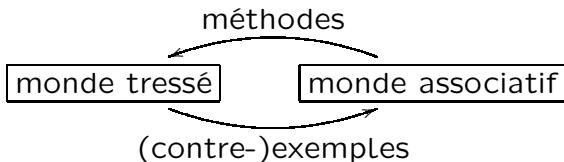
- ✓ Monoïde factorisé $G = HK$,
 $S = H \cup K$, $\sigma_{Fact}(x, y) = ((xy)_H, (xy)_K)$.
- ✓ Treillis (S, \wedge, \vee) , $\sigma_{Tr}(x, y) = (x \wedge y, x \vee y)$.
- ✓ Monoïde plaxique : $\sigma_{n,C}$ sur \mathbf{Col}_n .

$$\mathbf{Mon}(S, \sigma) := \langle S \mid x \cdot y = y' \cdot x', (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$$

$\mathbf{Mon}(S, \sigma) := \langle S \mid x \cdot y = y' \cdot x', (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$

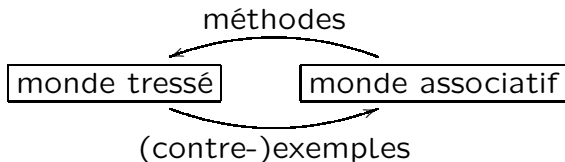


$\mathbf{Mon}(S, \sigma) := \langle S \mid x \cdot y = y' \cdot x', (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$



$\mathbf{Mon}(S, \sigma, e) := \mathbf{Mon}(S, \sigma) / e = 1$

$\mathbf{Mon}(S, \sigma) := \langle S \mid x \cdot y = y' \cdot x', (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$

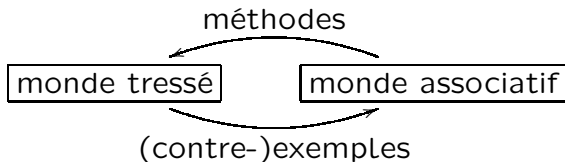


$\mathbf{Mon}(S, \sigma, e) := \mathbf{Mon}(S, \sigma) / e = 1$

Exemples :

✓ Monoïde factorisé $G = HK$, $\sigma_{Fact}(x, y) = ((xy)_H, (xy)_K)$:
 $\mathbf{Mon}(H \cup K, \sigma_{Fact}, 1_G) \simeq G$.

$\mathbf{Mon}(S, \sigma) := \langle S \mid x \cdot y = y' \cdot x', (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$

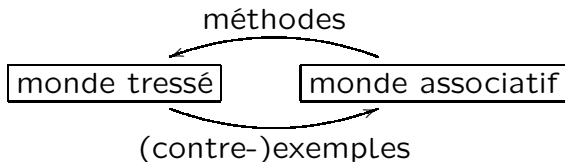


$\mathbf{Mon}(S, \sigma, e) := \mathbf{Mon}(S, \sigma) / e = 1$

Exemples :

- ✓ Monoïde factorisé $G = HK$, $\sigma_{Fact}(x, y) = ((xy)_H, (xy)_K)$:
 $\mathbf{Mon}(H \cup K, \sigma_{Fact}, 1_G) \simeq G$.
- ✓ Alg. Lie V' , $V = V' \oplus \mathbb{k}1$, $\sigma_{Lie}(x \otimes y) = y \otimes x + 1 \otimes [x, y]$:
 $\mathbf{Alg}(V, \sigma_{Lie}, 1) \simeq UEA(V', [])$.

$$\mathbf{Mon}(S, \sigma) := \langle S \mid x \cdot y = y' \cdot x', (y', x') = \sigma(x, y) \rangle$$



$$\mathbf{Mon}(S, \sigma, e) := \mathbf{Mon}(S, \sigma) / e = 1$$

Exemples :

- ✓ Monoïde factorisé $G = HK$, $\sigma_{Fact}(x, y) = ((xy)_H, (xy)_K)$:
 $\mathbf{Mon}(H \cup K, \sigma_{Fact}, 1_G) \simeq G$.
- ✓ Alg. Lie V' , $V = V' \oplus \mathbb{k}1$, $\sigma_{Lie}(x \otimes y) = y \otimes x + 1 \otimes [x, y]$:
 $\mathbf{Alg}(V, \sigma_{Lie}, 1) \simeq UEA(V', [])$.
- ✓ Monoïde plaxique :
 $\mathbf{Mon}(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C) \simeq \mathbf{Pl}_n$.

Mots normaux : $\mathbf{Norm}(S, \sigma) = \{x_1 \dots x_k \in S^* \mid$
 $\sigma(x_j, x_{j+1}) = (x_j, x_{j+1})\}.$

10 Tressages idempotents : réécriture

Mots normaux : $\mathbf{Norm}(S, \sigma) = \{ \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k \in S^* \mid \sigma(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}) = (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}) \}$.

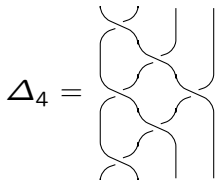
Thm (Dehornoy–Guiraud, L. '16) :

Pour un tressage idempotent σ sur S ,

$$\mathbf{Norm}(S, \sigma) \xleftrightarrow{1:1} \mathbf{Mon}(S, \sigma),$$

$$\text{Taut} : \mathbf{w} \mapsto [\mathbf{w}],$$

$$\Delta_{|\mathbf{w}|} \mathbf{w} \longleftarrow [\mathbf{w}] : \text{NForme.}$$



10 Tressages idempotents : réécriture

Mots normaux : $\mathbf{Norm}(S, \sigma) = \{ \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_k \in S^* \mid \sigma(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}) = (\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}) \}$.

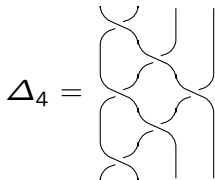
Thm (Dehornoy–Guiraud, L. '16) :

Pour un tressage idempotent σ sur S ,

$$\mathbf{Norm}(S, \sigma) \xleftrightarrow{1:1} \mathbf{Mon}(S, \sigma),$$

$$\text{Taut} : \mathbf{w} \mapsto [\mathbf{w}],$$

$$\Delta_{|\mathbf{w}|} \mathbf{w} \longleftarrow [\mathbf{w}] : \text{NForme.}$$



Système de réécriture convergent :

$$\mathbf{x}\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}'\mathbf{x}', \quad (\mathbf{y}', \mathbf{x}') = \sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

10 Tressages idempotents : réécriture

Mots normaux : $\mathbf{Norm}(S, \sigma) = \{x_1 \dots x_k \in S^* \mid \sigma(x_j, x_{j+1}) = (x_j, x_{j+1})\}$.

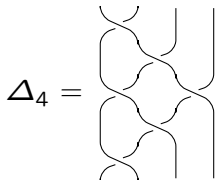
Thm (Dehornoy–Guiraud, L. '16) :

Pour un tressage idempotent σ sur S ,

$$\mathbf{Norm}(S, \sigma) \xleftrightarrow{1:1} \mathbf{Mon}(S, \sigma),$$

$$\text{Taut} : \mathbf{w} \mapsto [\mathbf{w}],$$

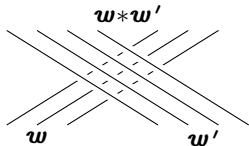
$$\Delta_{|\mathbf{w}|} \mathbf{w} \longleftarrow [\mathbf{w}] : \text{NForme.}$$



Système de réécriture convergent :

$$xy \rightarrow y'x', \quad (y', x') = \sigma(x, y).$$

Produit associatif $*$ sur $\mathbf{Norm}(S, \sigma)$:



Un neutre pour $\sigma : e \in S$ t.q.

+ σ préserve $\{(e, x), (x, e)\}$;

+ le mot wew' est normal $\Rightarrow ww'$ l'est.

Un neutre pour σ : $e \in S$ t.q.

+ σ préserve $\{(e, x), (x, e)\}$;

+ le mot $\mathbf{wew'}$ est normal $\Rightarrow \mathbf{ww'}$ l'est.

Mots normaux : $\mathbf{Norm}(S, \sigma, e) = \{x_1 \dots x_k \in S^* \mid \sigma(x_j, x_{j+1}) = (x_j, x_{j+1}), x_j \neq e\}$.

Thm (Dehornoy–Guiraud, L. '16) :

Pour un tressage idempotent σ sur S avec un neutre e ,

$$\mathbf{Norm}(S, \sigma, e) \xrightarrow{1:1} \mathbf{Mon}(S, \sigma, e),$$

$$\text{Taut} : \mathbf{w} \mapsto [\mathbf{w}],$$

$$\overline{\Delta_{|\mathbf{w}|}\mathbf{w}} \longleftrightarrow [\mathbf{w}] : \text{RNForme}.$$

Système de réécriture convergent :

$$e \rightarrow 1 \quad \& \quad xy \rightarrow y'x', \quad (y', x') = \sigma(x, y).$$

Produit associatif $*$ sur $\mathbf{Norm}(S, \sigma, e)$.

Un neutre pour σ : $e \in S$ t.q.

+ σ préserve $\{(e, x), (x, e)\}$;

+ le mot $\mathbf{wew'}$ est normal $\Rightarrow \mathbf{ww'}$ l'est.

Mots normaux : $\mathbf{Norm}(S, \sigma, e) = \{x_1 \dots x_k \in S^* \mid \sigma(x_j, x_{j+1}) = (x_j, x_{j+1}), x_j \neq e\}$.

Thm (Dehornoy–Guiraud, L. '16) :

Pour un tressage idempotent σ sur S avec un neutre e ,

$$\mathbf{Norm}(S, \sigma, e) \xrightarrow{1:1} \mathbf{Mon}(S, \sigma, e),$$

$$\text{Taut} : \mathbf{w} \mapsto [\mathbf{w}],$$

$$\overline{\Delta_{|\mathbf{w}|} \mathbf{w}} \longleftrightarrow [\mathbf{w}] : \text{RNForme}.$$

Système de réécriture convergent :

$$e \rightarrow 1 \quad \& \quad xy \rightarrow y'x', \quad (y', x') = \sigma(x, y).$$

Produit associatif $*$ sur $\mathbf{Norm}(S, \sigma, e)$.

Exemple : $(\mathbf{Norm}(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C), *_{tr}) \simeq (\mathbf{TY}_n, *_{Sch})$.

Données :

- + tressage σ sur S ;
- + anneau \mathbb{k} ;
- + $\varepsilon: S \rightarrow \mathbb{k}$ caractère tressé, e.g. $\varepsilon_1: x \mapsto 1$.

Données :

- + tressage σ sur S ;
- + anneau \mathbb{k} ;
- + $\varepsilon: S \rightarrow \mathbb{k}$ **caractère tressé**, e.g. $\varepsilon_1: x \mapsto 1$.

Construction :

- + $C^n := \text{Maps}(S^{\times n}, \mathbb{k})$;
- + $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$, $d^{n+1}d^n = 0$;
- + **cohomologie tressée** de (S, σ) avec coefficients $(\mathbb{k}, \varepsilon)$:
 $H^n(S, \sigma; \mathbb{k}, \varepsilon) := \text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n-1}$;

Données :

- + tressage σ sur S ;
- + anneau \mathbb{k} ;
- + $\varepsilon: S \rightarrow \mathbb{k}$ **caractère tressé**, e.g. $\varepsilon_1: x \mapsto 1$.

Construction :

- + $C^n := \text{Maps}(S^{\times n}, \mathbb{k})$;
- + $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$, $d^{n+1}d^n = 0$;
- + **cohomologie tressée** de (S, σ) avec coefficients $(\mathbb{k}, \varepsilon)$:

$$H^n(S, \sigma; \mathbb{k}, \varepsilon) := \text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n-1} ;$$
- + **cup produit** $\smile: H^n \otimes H^m \rightarrow H^{n+m}$, commutatif si $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Données :

- + tressage σ sur S ;
- + anneau \mathbb{k} ;
- + $\varepsilon: S \rightarrow \mathbb{k}$ **caractère tressé**, e.g. $\varepsilon_1: x \mapsto 1$.

Construction :

- + $C^n := \text{Maps}(S^{\times n}, \mathbb{k})$;
- + $d^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$, $d^{n+1}d^n = 0$;
- + **cohomologie tressée** de (S, σ) avec coefficients $(\mathbb{k}, \varepsilon)$:

$$H^n(S, \sigma; \mathbb{k}, \varepsilon) := \text{Ker } d^n / \text{Im } d^{n-1} ;$$
- + **cup produit** $\smile: H^n \otimes H^m \rightarrow H^{n+m}$, commutatif si $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Versions :

- + graphique ;
- + algébrique : **battages quantiques** (Rosso '95).

1) Déformations diagonales $\sigma_q(x, y) = q^{\omega(x, y)} \sigma(x, y)$:

ω est un 2-cocycle $\implies \sigma_q$ est un tressage
(Freyd–Yetter '89, Eisermann '05).

1) Déformations diagonales $\sigma_q(x, y) = q^{\omega(x, y)} \sigma(x, y)$:

ω est un 2-cocycle $\implies \sigma_q$ est un tressage
(Freyd–Yetter '89, Eisermann '05).

2) Invariants de nœuds

$$\mathcal{B}_{S, \sigma, \omega}(D) = \left\{ \sum_{\begin{array}{c} y' \nearrow x' \\ x \searrow y \end{array}} \omega(x, y) - \sum_{\begin{array}{c} x \nearrow y \\ y' \searrow x' \end{array}} \omega(x, y) \mid (S, \sigma)\text{-coloriages de } D \right\}$$

ω est un 2-cocycle $\implies \mathcal{B}_{S, \sigma, \omega}(D)$ est un invariant ;

ω est un 2-cobord $\implies \mathcal{B}_{S, \sigma, \omega}(D) = \{0, 0, \dots\}$.

(Fenn et al. '95, Carter et al. '01, ...).

1) Déformations diagonales $\sigma_q(x, y) = q^{\omega(x, y)} \sigma(x, y)$:

ω est un 2-cocycle $\implies \sigma_q$ est un tressage
(Freyd–Yetter '89, Eisermann '05).

2) Invariants de nœuds

$$\mathcal{B}_{S, \sigma, \omega}(D) = \left\{ \sum_{\substack{y' \nearrow x' \\ x \searrow y}} \omega(x, y) - \sum_{\substack{x \nearrow y \\ y' \searrow x'}} \omega(x, y) \mid (S, \sigma)\text{-coloriages de } D \right\}$$

ω est un 2-cocycle $\implies \mathcal{B}_{S, \sigma, \omega}(D)$ est un invariant ;

ω est un 2-cobord $\implies \mathcal{B}_{S, \sigma, \omega}(D) = \{0, 0, \dots\}$.

(Fenn et al. '95, Carter et al. '01, ...).

3) Unification de théories cohomologiques ;

+ transport de techniques ;

+ théories pour de nouvelles structures

(L. '13, ...).

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée

$$H^*(S, \sigma; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

$$\xleftarrow{\mathcal{QS}}$$

cohomologie de Hochschild

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma); \mathbb{k}, \varepsilon)$$

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée

$$H^*(S, \sigma; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

$$\xleftarrow{\mathcal{QS}}$$

cohomologie de Hochschild

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma); \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée

$$H^*(S, \sigma; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

petits complexes

$$\xleftarrow{\mathcal{QS}}$$

cohomologie de Hochschild

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma); \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

outils

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée

$$H^*(S, \sigma; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

petits complexes

$$\xleftarrow{\mathcal{QS}}$$

cohomologie de Hochschild

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma); \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

outils

Thm : \mathcal{QS} est un isomorphisme quand✓ $\sigma\sigma = \text{Id}$ et $\text{Char } \mathbb{k} = 0$ (Farinati & García-Galofre '16);

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée

$$H^*(S, \sigma, e; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

petits complexes

 $\xleftarrow{\mathcal{QS}}$

cohomologie de Hochschild

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma, e); \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

outils

Thm : \mathcal{QS} est un isomorphisme quand

- ✓ $\sigma\sigma = \text{Id}$ et $\text{Char } \mathbb{k} = 0$ (Farinati & García-Galofre '16);
- ✓ $\sigma\sigma = \sigma$ (L. '16).

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée

$$H^*(S, \sigma, e; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

petits complexes

 $\xleftarrow{\mathcal{QS}}$

cohomologie de Hochschild

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma, e); \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

outils

Thm : \mathcal{QS} est un **isomorphisme** quand

- ✓ $\sigma\sigma = \text{Id}$ et $\text{Char } \mathbb{k} = 0$ (*Farinati & García-Galofre '16*);
- ✓ $\sigma\sigma = \sigma$ (*L. '16*).

Preuve, cas $\sigma\sigma = \sigma$: théorie de Morse discrète algébrique.

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée

$$H^*(S, \sigma, e; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

petits complexes

 $\xleftarrow{\mathcal{QS}}$

cohomologie de Hochschild

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma, e); \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

outils

Thm : \mathcal{QS} est un **isomorphisme** quand

- ✓ $\sigma\sigma = \text{Id}$ et $\text{Char } \mathbb{k} = 0$ (*Farinati & García-Galofre '16*);
- ✓ $\sigma\sigma = \sigma$ (*L. '16*).

Preuve, cas $\sigma\sigma = \sigma$: théorie de Morse discrète algébrique.**Question ouverte** : Dans le cas général ?

4) Symétrisateur quantique \mathcal{QS} :

cohomologie tressée

$$H^*(S, \sigma, e; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

petits complexes

 $\xleftarrow{\mathcal{QS}}$

cohomologie de Hochschild

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{Mon}(S, \sigma, e); \mathbb{k}, \varepsilon)$$

cup produit \smile

outils

Thm : \mathcal{QS} est un **isomorphisme** quand✓ $\sigma\sigma = \text{Id}$ et $\text{Char } \mathbb{k} = 0$ (*Farinati & García-Galofre '16*);✓ $\sigma\sigma = \sigma$ (*L. '16*).**Preuve**, cas $\sigma\sigma = \sigma$: théorie de Morse discrète algébrique.**Question ouverte** : Dans le cas général ?**Application** : généralisation de la formule de Künneth pour des monoïdes factorisés $G = HK$.

~~14~~

Cohomologie de \mathbf{PL}_n

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon) \simeq H^*(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

CrL : \mathbf{PL}_n est de type $(FP)_\infty$ pour $n < \infty$.

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon) \simeq H^*(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

CrL : \mathbf{PL}_n est de type $(FP)_\infty$ pour $n < \infty$.

Thm : $HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_1) \leftarrow \Lambda^*(\mathbb{k}A_n)$ pour $n < \infty$.

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon) \simeq H^*(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

Cr1 : \mathbf{PL}_n est de type $(FP)_\infty$ pour $n < \infty$.

Thm : $HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_1) \leftarrow \Lambda^*(\mathbb{k}A_n)$ pour $n < \infty$.

Conjecture : \simeq . (Vraie pour $* \leq 2$.)

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon) \simeq H^*(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

Cr1 : \mathbf{PL}_n est de type $(FP)_\infty$ pour $n < \infty$.

Thm : $HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_1) \leftarrow \Lambda^*(\mathbb{k}A_n)$ pour $n < \infty$.

Conjecture : \simeq . (Vraie pour $* \leq 2$.)

Pour le caractère tressé $\varepsilon_0: c \mapsto 0, e_C \mapsto 1$,

Thm : 1) $HH^1(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_0) \simeq A_n^\vee$ ($:= \text{Maps}(A_n, \mathbb{k})$).

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon) \simeq H^*(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

Cr1 : \mathbf{PL}_n est de type $(FP)_\infty$ pour $n < \infty$.

Thm : $HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_1) \leftarrow \Lambda^*(\mathbb{k}A_n)$ pour $n < \infty$.

Conjecture : \simeq . (Vraie pour $* \leq 2$.)

Pour le caractère tressé $\varepsilon_0: c \mapsto 0, e_C \mapsto 1$,

Thm : 1) $HH^1(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_0) \simeq A_n^\vee$ ($:= \text{Maps}(A_n, \mathbb{k})$).

2) $HH^2 \simeq (\square)^\vee$.

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon) \simeq H^*(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

Cr1 : \mathbf{PL}_n est de type $(FP)_\infty$ pour $n < \infty$.

Thm : $HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_1) \leftarrow \Lambda^*(\mathbb{k}A_n)$ pour $n < \infty$.

Conjecture : \simeq . (Vraie pour $* \leq 2$.)

Pour le caractère tressé $\varepsilon_0: c \mapsto 0, e_C \mapsto 1$,

Thm : 1) $HH^1(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_0) \simeq A_n^\vee$ ($:= \text{Maps}(A_n, \mathbb{k})$).

2) $HH^2 \simeq (\square)^{\vee}$.

3) $HH^1 \cup HH^1 = 0$.

$$HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon) \simeq H^*(\mathbf{Col}_n, \sigma_{n,C}, e_C; \mathbb{k}, \varepsilon)$$

CrL : \mathbf{PL}_n est de type $(FP)_\infty$ pour $n < \infty$.

Thm : $HH^*(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_1) \leftarrow \Lambda^*(\mathbb{k}A_n)$ pour $n < \infty$.

Conjecture : \simeq . (Vraie pour $* \leq 2$.)

Pour le caractère tressé $\varepsilon_0: c \mapsto 0, e_C \mapsto 1$,

Thm : 1) $HH^1(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_0) \simeq A_n^\vee$ ($:= \text{Maps}(A_n, \mathbb{k})$).

2) $HH^2 \simeq (\square)^{\vee}$.

3) $HH^1 \smile HH^1 = 0$.

4) $HH^j \neq 0$ pour tout j quand $n > 2$.

Pour le caractère tressé $\varepsilon_0: c \mapsto 0, e_c \mapsto 1,$

Thm : 1) $HH^1(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_0) \simeq A_n^\vee$ ($:= \text{Maps}(A_n, \mathbb{k})$).

$$2) HH^2 \simeq \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right)^\vee.$$

$$3) HH^1 \smile HH^1 = 0.$$

4) $HH^j \neq 0$ pour tout j quand $n > 2$.

5) Pour $n = 2,$

$$HH^1 = \mathbb{k}f_{\square_1} \oplus \mathbb{k}f_{\square_2},$$

$$HH^3 = \mathbb{k}f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}};$$

$$HH^2 = \mathbb{k}f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_1 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}} \oplus \mathbb{k}f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_2 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}},$$

$$HH^k = 0, k > 3.$$

$$f_{\square_2} \smile f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_1 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}} = -f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_2 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}} \smile f_{\square_1} = f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}}.$$

Pour le caractère tressé $\varepsilon_0: c \mapsto 0, e_c \mapsto 1,$

Thm : 1) $HH^1(\mathbb{k}\mathbf{PL}_n; \mathbb{k}, \varepsilon_0) \simeq A_n^\vee$ ($:= \text{Maps}(A_n, \mathbb{k})$).

$$2) HH^2 \simeq \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right)^\vee.$$

$$3) HH^1 \smile HH^1 = 0.$$

4) $HH^j \neq 0$ pour tout j quand $n > 2$.

5) Pour $n = 2,$

$$HH^1 = \mathbb{k}f_{\square_1} \oplus \mathbb{k}f_{\square_2},$$

$$HH^3 = \mathbb{k}f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}};$$

$$HH^2 = \mathbb{k}f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_1 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}} \oplus \mathbb{k}f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_2 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}},$$

$$HH^k = 0, k > 3.$$

$$f_{\square_2} \smile f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_1 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}} = -f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_2 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}} \smile f_{\square_1} = f_{\begin{array}{|c|} \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \square_2 \\ \hline \square_1 \\ \hline \end{array}}.$$

CrL : dimension cohomologique :

$$cd(\mathbf{PL}_n) = \infty, \quad 3, \quad 1$$

$$\text{pour } n > 2, \quad = 2, \quad = 1.$$