Les 2-catégories associées au groupe quantique $sl(2)$

Victoria Lebed

<u>but</u>: (1) introduire une version "catégorifiable" $\dot{U}$ du groupe quantique $U_q(sl_2)$

(2) présenter la 2-catégorie $\dot{\mathcal{U}}$ qui catégorifie $\dot{U}$, i.e. $K_0(\dot{\mathcal{U}}) \simeq \dot{U}$.

(3) montrer comment "deviner" les structures sur $\dot{\mathcal{U}}$

<u>notation</u>: • on va utiliser des lettres droites (e.g. U, E, F) dans le monde des groupes quantiques, et des lettres rondes (e.g. $\mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$) dans le monde des 2-catégories

• on va écrire 1-m. (2-m.) pour 1-morphismes (2-morphismes)

1 La version $\dot{U}$ de Lusztig de $U_q(sl_2)$

<u>rappel</u>:

$$U := U_q(sl_2) = \left\langle E, F, K^{\pm 1} \;\middle|\; \begin{array}{l} KK^{-1} = K^{-1}K = 1 \\ KEK^{-1} = q^2 E \\ KFK^{-1} = q^{-2} F \\ EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \end{array} \right\rangle$$

• algèbre associative unitaire sur $\mathbb{C}(q)$

• base PBW: $\{F^m K^n E^t \mid m, t \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}\}$

• forme entière $U_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}$:

engendrée par $E^{(n)} = \frac{E^n}{[n]!}$, $F^{(n)} = \frac{F^n}{[n]!}$, etc.

$$\tilde{U} := U\langle 1_n, n \in \mathbb{Z} \rangle \;\Big|\; \begin{array}{l} 1_n \cdot 1_m = \delta_{n,m} 1_n \leftarrow \text{idempotents orthogonaux} \\ K \cdot 1_n = 1_n \cdot K = q^n \cdot 1_n \leftarrow \text{on peut oublier les } K \text{ !} \\ E \cdot 1_n = 1_{n+2} \cdot E \\ F \cdot 1_n = 1_{n-2} \cdot F \end{array}$$

$$\dot{U} := \bigoplus_{m,n} \underbrace{1_m \cdot \tilde{U} \cdot 1_n}_{=: {}_m U_n}$$

• alg. ass. "quasi-unitaire": $1 = \text{"}\sum_{n \in \mathbb{Z}}\text{"} 1_n$, $K = \text{"}\sum_{n \in \mathbb{Z}}\text{"} q^n 1_n$

• base canonique $\dot{B}$ de Lusztig: $\{E^{(a)}F^{(b)} 1_n \mid n < b-a\} \sqcup \{F^{(b)}E^{(a)} 1_n \mid n > b-a\} \sqcup \{E^{(a)}F^{(b)} 1_{b-a} = F^{(b)}E^{(a)} 1_{b-a}\}$

<u>fait</u>: $\forall x, y \in \dot{B}$, $xy = \sum_{z \in \dot{B}} m_{x,y}^z \, z$, $m_{x,y}^z \in \mathbb{N}[q^{\pm 1}]$

<u>exemple</u>:

$EF1_n = FE \cdot 1_n + \frac{K^n - K^{-n}}{q - q^{-1}} \cdot 1_n = FE1_n + [n] \cdot 1_n$, $[n] \in \begin{cases} \mathbb{N}[q^{\pm 1}] \text{ si } n \geq 0 \\ -\mathbb{N}[q^{\pm 1}] \text{ si } n \leq 0 \end{cases}$

• forme entière $\dot{U}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}$

<u>problème</u>:

dans une 2-catégorie, on veut avoir $\underset{\text{1-m.}}{G \circ F} = \bigoplus_i \underset{\substack{\text{1-m.} \\ \text{indécomposables}}}{H_i} = \bigoplus_j \underset{\mathbb{N}}{n_j} \underset{H_{j_1} \neq H_{j_2} \text{ si } j_1 \neq j_2}{H_j}$

$\Downarrow$

dans U, on veut une base avec des propriétés de positivité et d'intégralité

bases de Lusztig: difficile à travailler avec

<u>solution</u>: la version $\dot{U}$ de U (Belinson, Lusztig, MacPherson)

<u>intuition</u>: $V \in {}_U\mathrm{mod}$, $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n$, avec $Kv = q^n v$ $\forall v \in V(n)$

$$\begin{tikzcd} V(n+2) \arrow[r, bend right, "F"'] & V(n) \arrow[l, bend right, "E"'] \arrow[r, bend right, "F"'] & V(n-2) \arrow[l, bend right, "E"'] \end{tikzcd}$$

2 La forme sémi-linéaire sur $\dot{\mathcal{U}}$

$\langle \cdot ; \cdot \rangle : \dot{\mathcal{U}} \times \dot{\mathcal{U}} \to \mathbb{C}(q)$ $\overset{\text{def}}{:}$

$\dot{\mathcal{U}}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \times \dot{\mathcal{U}}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \to \mathbb{Z}[[q^{\pm 1}]]$

(1) $\mathbb{C}(q)$-sémi-linéaire : $\langle f(q)x, g(q)y \rangle = f(q^{-1})\, g(q) \langle x, y \rangle$ $\forall f, g$ - polynômes de Laurent en q

(2) propriété "Hom" : $\langle 1_n x 1_m, 1_{n'} y 1_{m'} \rangle = 0$ si $n \neq n'$ ou $m \neq m'$

(3) adjonction : $\langle ux, y \rangle = \langle x, \tau(u) y \rangle$ $\forall x, y, u \in \dot{\mathcal{U}}$

$\tau : \dot{\mathcal{U}} \to \dot{\mathcal{U}}$ $\overset{\text{def}}{:}$ (a) antihomomorphisme antilinéaire : $\tau(xy) = \tau(y)\tau(x)$, $\tau(f(q)x) = f(q^{-1})\tau(x)$

$\tau^2 = 1 \Leftarrow$ (b) $\tau(1_n) = 1_n$

(c) $\tau(E 1_n) = q^{1-n} F 1_{n+2}$,

$\tau(F 1_{n+2}) = q^{1+n} E 1_n$

(4) propriété grassmannienne : $\langle E^{(a)} 1_n, E^{(a)} 1_n \rangle = \langle F^{(a)} 1_n, F^{(a)} 1_n \rangle = \prod_{j=1}^{a} \frac{1}{1-q^{2j}}$

Proposition : $\exists!$ forme sur $\dot{\mathcal{U}}$ satisfaisant propriétés (1)-(4).

3 Catégorification de $\dot{\mathcal{U}}$: premier essai

Conj. (Frenkel, 94) : on peut catégorifier $\dot{\mathcal{U}}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}$ avec $\dot{\mathcal{B}}$.

procédé général :

anneau "idempotenté" (Lauda : idempotented ring)
$\dot{\mathcal{U}} = \bigoplus_{m,n \in \mathbb{Z}} 1_m \dot{\mathcal{U}} 1_n$

↓ (anneau de Grothendieck ↑)

catégorie préadditive $\mathcal{U}$:
Ob : $n \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(n, m) = 1_m \dot{\mathcal{U}} 1_n$ ← groupe abélien
$\mathrm{Id}_n = 1_n$
comp^n = mult^n dans $\dot{\mathcal{U}}$

$q^n \mathcal{B}$ ↔ $\mathcal{B}\{n\}$ shift
catégorie graduée $\mathbb{C}$-linéaire

plus de structure sur $\dot{\mathcal{U}}$
⇣ catégorification
2-cat. graduée $\mathbb{C}$-linéaire $\mathcal{U}$

en particulier, $\langle \cdot, \cdot \rangle$
$\overset{\text{gdim}}{\leftsquigarrow}$
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}} : 1\text{-m.} \times 1\text{-m.}$
↓
$\mathrm{GrVect}_{\mathbb{C}}$

où $\mathrm{gdim}(H) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^k \dim(H_k)$
(H : $\mathbb{C}$-e.v. gradué)
dimension graduée

définition

$\mathcal{U}^*$: 2-cat. graduée $\mathbb{C}$-linéaire

objets : $n \in \mathbb{N}$

1-m. : sommes directes des compositions de

$1_n\{s\}$, ${}_{n+2}\mathcal{E}_n\{s\}$, ${}_n\mathcal{F}_{n+2}\{s\}$

$\quad\quad\quad\quad \in \mathrm{Hom}(n,n+2) \quad \in \mathrm{Hom}(n+2,n)$

où $1_{n+2}\ {}_{n+2}\mathcal{E}_n = {}_{n+2}\mathcal{E}_n \cdot 1_n = {}_{n+2}\mathcal{E}_n$

— ″ — pour $\mathcal{F}$

notation : on omet les indices si cela ne cause pas de confusion

calcul graphique :

${}_{n+2}\big|^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}\ n =: \uparrow n$, ${}_n\big|^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}\ {}_{n+2} =: \downarrow n+2$

1-m. : $\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow$

2-m. : combinaisons $\mathbb{C}$-lin. des compositions (horizontales & verticales) de :

$1_{\mathcal{E}_n} = \uparrow n$, $1_{\mathcal{F}_n} = \downarrow n$, $sh^s_{\mathcal{E}_n}$, $sh^s_{\mathcal{F}_n}$, $\widehat{sh}^s_{\mathcal{E}_n}$, $\widehat{sh}^s_{\mathcal{F}_n}$

deg = 0, 0, deg = s, s, −s, −s

z_n, $\hat{z}_n$, u_n, $\hat{u}_n$

deg = 2, 2, deg = −2, deg = −2

$\mathcal{F}\ \mathcal{E}$, $\mathcal{E}\ \mathcal{F}$, $\mathcal{F}\ \mathcal{E}$, $\mathcal{E}\ \mathcal{F}$

deg = 1+n, 1−n, 1+n, 1−n

$1_n\{s\}$, 1_n, $1_n\{s\}$

structures de composition et d'identité évidente

modulo relations locales :

- $\mathcal{E}_n \simeq \mathcal{E}_n\{s\}$ via $sh^s_{\mathcal{E}_n}$, $\widehat{sh}^s_{\mathcal{E}_n}$

  $\mathcal{F}_n \simeq \mathcal{F}_n\{s\}$ — ″ —

- $\mathcal{F}_n\{-s\} \dashv \mathcal{E}_n\{s\} \dashv \mathcal{F}_n\{-s\}$

  $\uparrow n = \uparrow n$ etc

cl : tout 1-m. a un biadjoint

- $z_n = {}^*\hat{z}_n = \hat{z}_n^*$, $\hat{z}_n = {}^*z_n = z_n^*$

  $u_n = {}^*\hat{u}_n = \hat{u}_n^*$, $\hat{u}_n = {}^*u_n = u_n^*$

$= \uparrow n$

$= \times n$

cl : (1) tout 2-m. est cyclique

(2) déformations topologiques d'un diagramme ne changent pas le 2-m. présenté

motivation :

c.f. plus haut

- $\mathrm{gdim}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^*}(\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_n)) = \langle E1_n, E1_n\rangle = \frac{1}{1-q^2} = \underset{\uparrow\ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_n}}{1} + q^2 + q^4 + \dots$

$\Rightarrow$ on ajoute $\boxed{\uparrow n}$ de degré 2

$\deg(\uparrow^m n) = 2m \Rightarrow$ tous les endomorphismes de $\mathcal{E}_n$ sont des combinaisons linéaires des $\uparrow^m n :=$ m points n

- $\mathrm{gdim}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^*}(\mathcal{E}^2_n,\mathcal{E}^2_n)) = \langle E^2 1_n, E^2 1_n\rangle = [2]!^2 \langle E^{(2)}1_n, E^{(2)}1_n\rangle$
$= (q+q^{-1})^2 \frac{1}{1-q^2}\frac{1}{1-q^4} = (1+q^{-2})(1+q^2+q^4+\dots)^2 = q^{-2}+3+5q^2+\dots$

$\Rightarrow$ on ajoute $\boxed{\times\ n}$ de degré 2 ($\mathcal{E}_{n+2}$, $\mathcal{E}_n$, $n+4$, n)

$\deg(\ ) = -4 \Rightarrow\ = 0$

$\dim(H_0) = 3 \Rightarrow$: 2 relations de dépendance linéaire

- $\mathrm{gdim}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}^*}(\mathcal{F}\mathcal{E}_n, 1_n)) = \langle FE1_n, 1_n\rangle = \langle E1_n, \underset{q^{n+1}E}{\tau(F)}1_n\rangle = \frac{q^{n+1}}{1-q^2}$

$\Rightarrow$ on ajoute $\boxed{n\ \frown\ n}$ ($n+2$, $\mathcal{F}_{n+2}$, $\mathcal{E}_n$) de degré $n+1$

$\deg(\frown^m n) = 1+n+2m$

- pb : comment choisir des relations ?

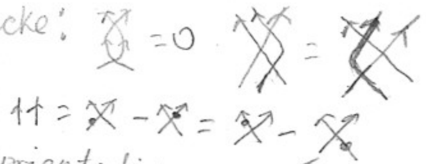
(1) utiliser $\langle\cdot,\cdot\rangle$

(2) s'inspirer du calcul graphique

(3)* variétés de drapeaux itérés

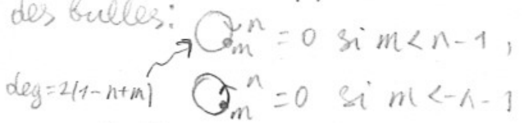
définition de $\mathcal{U}^*$ (suite)

• relations NilHecke :

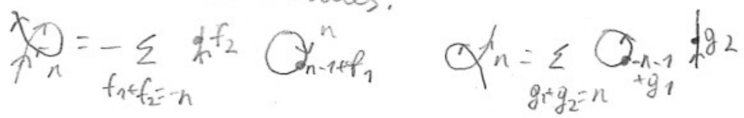


crl : idem pour l'orientation opposée

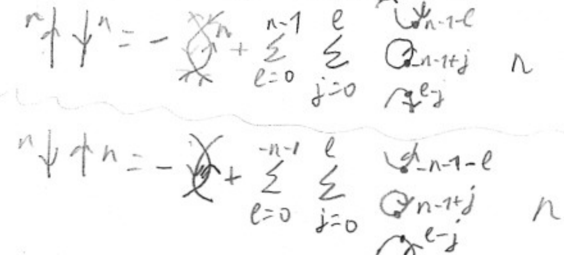
• positivité des bulles :



• reduction aux bulles :



• décomposition de $\mathcal{E}\mathcal{F}$ & $\mathcal{F}\mathcal{E}$:



crl : (1) relations de commutation entre $\mathcal{E}$ & $\mathcal{F}$

(2) tout diagramme fermé peut être reduit à une somme de diagrammes formés de bulles avec des points, non-nichées et de m̂ orientation

4 Problèmes de "shift" & catégorie $\mathcal{U}$

problème : $x \simeq x\{m\}$ dans $\mathcal{U}^*$,

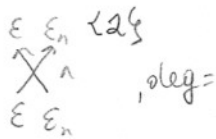
or $x \neq q^m x$ dans $\dot{U}$!!!

solution : $\mathcal{U}(x,y) := (\mathcal{U}^*)_0(x,y)$,

i.e. 2-m. qui préservent le degré $\quad \mathcal{U}^*(x,y) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathcal{U}(x\{s\},y)$

• $\mathcal{U}(x,y)$ reste $\mathbb{C}$-linéaire mais perd la graduation

• dans la définition des 2-m. on modifie les degrés des 1-m. :



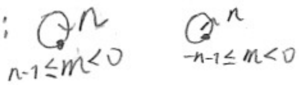
, deg = 0 etc.

• $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{F}_{n+2}$ deviennent "presque biadjoints" :

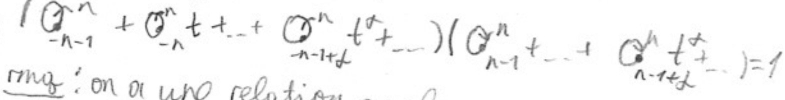
$\mathcal{F}_{n+2}\{n+1\} \dashv \mathcal{E}_n \dashv \mathcal{F}_{n+2}\{-n-1\}$

notations :

• fausses bulles :

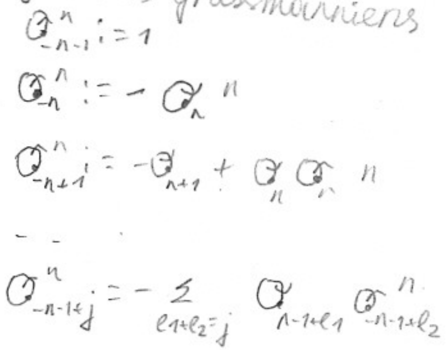


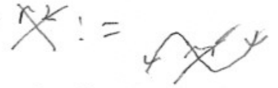
sont définies par récurrence via la relation infinie de Grassmann :



rmq : on a une relation analogue pour les homologies des Grassmanniens

ex : $n \geq 0$



•  etc.

rmq : bien défini !

5 Problèmes des indécomposables & catégorie $\dot{\mathcal{U}}$

<u>problème</u> : base canonique $\dot{B} \longleftrightarrow$ système d'indécomposables $\dot{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{U}$.

<u>solution générale</u> : <u>l'enveloppe de Karoubi</u> (= complété de Cauchy = scindement des idempotents)

cat. $\mathcal{C} \rightsquigarrow$ cat. <u>$Kar(\mathcal{C})$</u> : $Ob(Kar(\mathcal{C})) = \{(c,e) \mid c \in Ob(\mathcal{C}),\ e \in Hom_{\mathcal{C}}(c,c)$-idempotent, i.e. $e^2 = e\}$

$Hom_{Kar(\mathcal{C})}((c,e),(c',e')) = \{e' f e \mid f \in Hom_{\mathcal{C}}(c,c')\} = \{f \in Hom_{\mathcal{C}}(c,c')$ t.q. $f = fe = e'f\}$

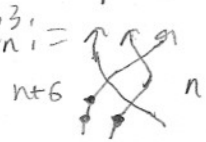
- $\mathcal{C} \hookrightarrow Kar(\mathcal{C})$ - une sous-catégorie pleine
  $c \mapsto (c, Id_c)$
- tout idempotent $e \in Hom(\tilde{c}, \tilde{c})$ est scindé dans $Kar(\mathcal{C})$, i.e. $\exists\ \tilde{c} \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \hat{c}' \in Ob(Kar(\mathcal{C}))$ t.q. $g \circ f = e$, $f \circ g = Id_{\hat{c}'}$

$Kar(\mathcal{C})$ est universelle parmi de telles catégories,

i.e.
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{C}' \\ Kar(\mathcal{C}) \arrow[ur, dashed, "\exists! \hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$
si tous les idempotents sont scindés dans $\mathcal{C}'$

<u>on revient à notre $\mathcal{U}$.</u>

On choisit les idempotents $Hom_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}_n^a, \mathcal{E}_n^a) \ni e_n^a := u_{a-1} u_{a-2} \dots u_1 \circ u_{a-1} u_{a-2} \dots u_2 \circ \dots \circ u_{a-1} u_{a-2} \circ u_{a-1} \circ z_1^{a-1} z_2^{a-2} \dots z_{a-1}$

<u>exemple</u> : $e_n^3 :=$ 

$\hat{e}_n^3 :=$ 

On pose $\hat{e}_n^a := rotation_{\pi}(e_n^a)$

$\dot{\mathcal{U}} := Kar(\mathcal{U})$

<u>Th.</u> (Lauda) : la 2-catégorie $\dot{\mathcal{U}}$ catégorifie l'algèbre de Lusztig $\dot{U}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}$;

plus précisément,

$K_0(\dot{\mathcal{U}}) \cong \dot{U}$

$\mathcal{E}_n^{(a)} \longleftrightarrow E^{(a)} 1_n$

$\mathcal{F}_n^{(a)} \longleftrightarrow F^{(a)} 1_n$

$\dot{\mathcal{B}} \longleftarrow \dot{B}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle = gdim(Hom_{\dot{\mathcal{U}}}(\cdot, \cdot))$

symétries du calcul graphique $\longleftrightarrow$ des (anti-)homomorphismes intéressants

$\dot{\mathcal{U}} \circlearrowright$ cohomologie des variétés des drapeaux itérés $\longleftrightarrow$ représentations irréductibles