Promenade au pays des polyèdres

exposé du mercredi 27 janvier 2016 au club de maths de Nantes

par Xavier Saint Raymond

Le texte qui va suivre est principalement motivé par la fascination de son auteur pour ces objets géométriques à la fois si simples et si compliqués que sont les polyèdres. Pour en faciliter la rédaction, mais sans doute pas la lecture, je n'ai pas reproduit ici les dessins et figures qui accompagnaient cet exposé ...

Prologue : les polygones du plan euclidien

Avant d'attaquer le sujet des polyèdres, faisons quelques observations sur les polygones du plan. Ce sont des figures délimitées par une ligne brisée, c'est-à-dire une succession de segments (droits), qui sépare un *intérieur* d'un *extérieur* ; je ferai même l'hypothèse que ces polygones sont *convexes*, ce qui ici revient à exiger que les angles intérieurs soient $< 180^o$, ce que j'écrirai plutôt $< \pi$ en adoptant pour unité d'angle l'*angle plat* noté π.

Il y a une notion de polygone *régulier* : un polygone est dit régulier si ses côtés sont tous de même longueur, et tous ses angles intérieurs sont égaux. Pour chaque $n \geq 3$, il existe un polygone régulier à n côtés : pour le construire, il suffit de partager la circonférence d'un cercle en n arcs égaux, ce qui s'obtient en prenant au centre du cercle des angles de $2\pi/n$, puis de joindre les points de partage par des segments. Il y a même *unicité* du polygone régulier à n côtés, du moins à similitude près, c'est-à-dire à déplacement et changement d'échelle près.

Notant α_k les angles intérieurs d'un polygone, on en peut calculer la somme. Dans le cas du triangle, on trace la parallèle à la base passant par le sommet, et par le théorème des angles alternes-internes, on retrouve autour du sommet les trois angles du triangle, ce qui permet de conclure que la somme de ces trois angles vaut un angle plat (théorème d'Euclide). Passant ensuite à un polygone à n côtés, on peut découper ce polygone en $n-2$ triangles, et conclure que la somme de ses angles vaut $(n-2)\,\pi$. Dans le cas particulier du polygone *régulier* à n côtés, chacun des angles est donc égal à $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$.

Une formule équivalente consiste à additionner les angles *extérieurs* du polygone. On appelle *angle extérieur* du polygone l'angle formé en un sommet à l'extérieur du polygone par un de ses côtés avec le prolongement du côté adjacent ; ainsi, l'angle extérieur mesure la *courbure* ponctuelle du bord en ce sommet ; si l'angle intérieur est α_k, l'angle extérieur correspondant est alors $\varepsilon_k = \pi - \alpha_k$, ce qui permet de calculer ainsi la somme des angles extérieurs :

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} (\pi - \alpha_k) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \pi\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\Big) = n\,\pi - (n-2)\,\pi = 2\pi\,,$$

et ce résultat s'interprète en disant que *la courbure totale du bord vaut* 2π. Mais il y a aussi une façon directe de trouver cette somme : à partir d'un point intérieur du polygone, abaissons des perpendiculaires sur les côtés du polygone ; un raisonnement simple de géométrie euclidienne montre que les angles extérieurs se retrouvent au point central comme angle entre deux perpendiculaires, ce qui permet de conclure que leur somme vaut un tour complet, soit 2π. En outre, cette preuve directe fournit un procédé pour construire un polygone d'angles extérieurs prescrits $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ de somme 2π.

1. Présentation des polyèdres

Nous définissons ici les polyèdres de l'espace euclidien (de dimension 3) d'une façon analogue : on appelle *polyèdre* une figure de l'espace délimitée par un jeu de faces planes, qui sont d'ailleurs automatiquement polygonales, qui sépare un *intérieur* d'un *extérieur* ; et je ferai comme pour les polygones l'hypothèse que ces polyèdres sont *convexes*, ce qui ici revient à exiger que les angles *dièdres* intérieurs soient $< \pi$, les angles dièdres étant les angles que forment entre elles deux faces adjacentes. Les côtés des faces polygonales d'un polyèdre sont appelés ses *arêtes*, et les extrémités de ces arêtes sont appelées les *sommets* du polyèdre. Le bord du polyèdre est donc constitué d'un arrangement de faces, arêtes et sommets, et on peut mentionner ici que chaque arête sépare deux faces et relie deux sommets (les mots "sépare" et "relie" pouvant d'ailleurs être échangés !). Il y a une façon peut-être plus convaincante mais un peu plus abstraite de définir les polyèdres convexes, qui serait de dire que ce sont les intersections compactes d'un nombre fini de demi-espaces.

Comme pour les polygones, il y a une notion de polyèdre *régulier*. Laissant de côté la définition abstraite en termes de groupe agissant transitivement sur les drapeaux, on les peut définir plus simplement comme les polyèdres dont toutes les faces sont égales à un même polygone régulier, et dont tous les angles dièdres sont égaux. Contrairement au cas des polygones, il n'y a pas une infinité de polyèdres réguliers : on sait depuis l'Antiquité grecque qu'il y a cinq et seulement cinq polyèdres réguliers ; qu'il n'y en a pas plus que cinq est un résultat facile connu des anciens Pythagoriciens, mais l'existence du dodécaèdre et de l'icosaèdre est un résultat plus difficile qui date sans doute du quatrième siècle avant JC, et que l'on trouve magistralement exposé dans les *Éléments* d'Euclide. Les polyèdres portent un nom imposé par leur nombre de faces ; la liste des polyèdres réguliers, avec leur nombre de faces f, leur nombre d'arêtes a et leur nombre de sommets s est la suivante :

Nom	f	a	s
Tétraèdre	4	6	4
Cube (hexaèdre)	6	12	8
Octaèdre	8	12	6
Dodécaèdre	12	30	20
Icosaèdre	20	30	12

On peut observer dans ce tableau des symétries dont nous n'aurons pas le temps de parler ici, mais qui conduisent à d'intéressantes interprétations géométriques.

2. La formule d'Euler

Dans le tableau précédent, faisons la somme du nombre f et du nombre s : dans chacune des lignes, nous trouvons que

$$f + s = a + 2 .$$

Bien entendu, quand on prend un petit groupe quelconque de nombres entiers, on peut toujours trouver des relations entre eux. Mais ce qui est remarquable dans la *formule d'Euler* écrite ci-dessus, c'est qu'elle reste vraie pour tous les polyèdres convexes, même non réguliers, qui sont, eux, en nombre infini. Il en résulte que cette formule contient une véritable information, et elle peut servir à démontrer une foultitude de résultats intéressants dont nous n'aurons pas le temps de parler ici.

Il existe une grande quantité de démonstrations de cette formule d'Euler. Je trouve qu'aucune d'entre elles n'est vraiment simple ; en outre, elles sont le plus souvent un peu *foireuses*, en ce sens que pour se convaincre qu'elles fonctionnent bien, et dans tous les cas de figures, il faut rajouter un raisonnement parfois bien compliqué. Il y a cependant une preuve due à Legendre, qui passe par la géométrie sphérique et la formule de Girard, qui me semble au-dessus de tout soupçon, et que j'ébaucherai dans un appendice.

Une réciproque ? Une fois que l'on sait que tout polyèdre vérifie $f + s = a + 2$, on peut poser la question de la réciproque : *étant donnés trois entiers f, a et s vérifiant $f + s = a + 2$, existe-t-il un polyèdre convexe ayant ces nombres-là de faces, d'arêtes et de sommets ?* Comme la formule fixe a en fonction de f et de s, et que pour tout polyèdre on a clairement $f \geq 4$ et $s \geq 4$, on peut reformuler la question ainsi : *étant donnés deux entiers $f \geq 4$ et $s \geq 4$, existe-t-il un polyèdre convexe à f faces et s sommets (et donc à $a = f + s - 2$ arêtes) ?* La réponse est clairement : *pas toujours*. En effet, pour $s = 4$ sommets par exemple, on ne peut trouver que quatre plans contenant au moins trois sommets distincts, et donc il ne peut y avoir que quatre faces : le polyèdre à 2016 faces et 4 sommets n'existe pas ! Au lieu de cela, on a le résultat suivant.

Proposition. *Pour qu'il existe un polyèdre convexe à f faces et s sommets, il faut et il suffit que l'on ait les deux inégalités :* $4 \leq f \leq 2\,s - 4$ *et* $4 \leq s \leq 2\,f - 4$.

Démonstration. Montrons d'abord que ces inégalités sont nécessaires. Je note n_j le nombre de côtés de la face numéro j, et m_k le nombre d'arêtes arrivant au sommet numéro k ; comme on a $n_j \geq 3$ pour tout j et $m_k \geq 3$ pour tout k, les sommes des n_j et des m_k vérifient les (in)égalités

$$3\,f \;\leq\; \sum_{j=1}^{f} n_j \;=\; 2\,a \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad 3\,s \;\leq\; \sum_{k=1}^{s} m_k \;=\; 2\,a$$

où l'égalité avec $2\,a$ provient de ce que ces sommes comptent les arêtes, et les comptent même deux fois chaque, puisque toute arête sépare deux faces et relie deux sommets. Profitant de la formule d'Euler, on peut remplacer $2\,a$ dans ces inégalités par $2\,f + 2\,s - 4$, et cela nous conduit tout droit aux inégalités $f \leq 2\,s - 4$ et $s \leq 2\,f - 4$ annoncées (et qui entraînent $f \geq 4$ et $s \geq 4$).

On établit la réciproque d'abord dans le cas où $f = s = n + 1$ pour un $n \geq 3$. Dans ce cas, il suffit de prendre pour polyèdre solution une pyramide avec pour base un polygone à n côtés.

Ensuite dans le cas où $f < s$, on écrit $f = n + 1 + (s - f)$ et $s = n + 1 + 2\,(s - f)$ avec $n+1 = 2\,f - s$ et donc $n+1 \geq 4$ par hypothèse. On construit dans ce cas le polyèdre en partant de la pyramide considérée dans le premier cas, et en lui faisant subir $s - f$ fois un procédé élémentaire permettant d'augmenter le nombre des faces d'une unité et celui des sommets de deux unités : ce procédé consiste à choisir un sommet à trois arêtes et à l'amputer, ce qui retire un sommet mais en rajoute trois autres, et fait apparaître une nouvelle face (les trois nouveaux sommets ainsi produits sont eux-mêmes des sommets à trois arêtes, si bien que le procédé peut être répété autant de fois qu'on le désire).

Enfin dans le cas où $f > s$, on procède de façon symétrique en écrivant $f = n+1+2\,(f - s)$ et $s = n + 1 + (f - s)$ avec $n + 1 = 2\,s - f$ et donc $n + 1 \geq 4$. On construit le polyèdre dans ce cas en partant encore de la pyramide considérée dans le premier cas, et en lui faisant subir $f - s$ fois un nouveau procédé élémentaire permettant d'augmenter le nombre des faces de deux unités et celui des sommets d'une seule : ce nouveau procédé consiste à choisir une face triangulaire et à lui coller dessus un tétraèdre aplati, ce qui retire une face mais en rajoute trois autres, et ajoute un nouveau sommet (et là encore le procédé peut être répété puisque les nouvelles faces sont triangulaires). ∎

3. Une variante : la formule de Descartes

La formule d'Euler apparaît dans une lettre d'Euler (1707–1783) à Goldbach écrite en 1750. Il y mentionne que $f + s = a + 2$, et que la somme de tous les angles de toutes les faces vaut $(2\,s - 4)\,\pi$; en outre, Euler s'étonne que personne avant lui n'ait remarqué ces propriétés si générales des polyèdres. C'est qu'il ignorait que Descartes (1596–1650) un siècle plus tôt avait produit une formule équivalente. La formule de Descartes apparaît dans un ouvrage portant le titre de *Progymnasmata de Solidorum Elementis* (Exercices sur les Éléments des Solides), mais ce manuscrit ne fut pas publié et faillit rester inconnu pour toujours. Descartes ayant été invité à Stockholm fin 1649 par la reine de Suède, il y mourut des rigueurs du climat ; ses affaires ayant été renvoyées à Paris par bateau, une caisse tomba dans la Seine et fut repêchée, et parmi les manuscrits qu'elle contenait, certains furent publiés et d'autres (parmi lesquels le nôtre) conservés pour consultation, mais finirent par disparaître ; seule a survécu la copie qu'en fit Leibniz en 1676, mais qui ne fut retrouvée qu'en 1860 ! Le manuscrit de Leibniz contient sans sa preuve la formule que nous allons décrire plus loin, mais contient aussi le corollaire facile qui affirme que la somme de tous les angles de toutes les faces vaut $(2\,s-4)\,\pi$ comme le signale Euler un siècle plus tard.

Énoncé de la formule. De même que nous avons mesuré la courbure ponctuelle du bord d'un polygone en un sommet par l'angle extérieur, nous allons ici mesurer la courbure ponctuelle du bord d'un polyèdre en un sommet par le *déficit angulaire* en ce sommet ; ce déficit angulaire se calcule en soustrayant à 2π la somme des angles (mesurés sur les faces) qui entourent ce sommet : en effet, la somme de ces angles est toujours strictement comprise entre 0 et 2π. Ce déficit angulaire se voit bien quand on dessine le patron d'un polyèdre ; il se calcule aisément pour les polyèdres réguliers : le tétraèdre ayant des faces triangulaires associées par trois en chaque sommet, $\delta_{\text{tét}} = 2\pi - 3\times\frac{1}{3}\pi = \pi$, le cube ayant des faces carrées associées par trois en chaque sommet, $\delta_{\text{cub}} = 2\pi - 3\times\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$, l'octaèdre ayant des faces triangulaires associées par quatre en chaque sommet, $\delta_{\text{oct}} = 2\pi - 4\times\frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$, le dodécaèdre ayant des faces pentagonales associées par trois en chaque sommet, $\delta_{\text{dod}} = 2\pi - 3\times\frac{3}{5}\pi = \frac{1}{5}\pi$, et l'icosaèdre ayant des faces triangulaires associées par cinq en chaque sommet, $\delta_{\text{ico}} = 2\pi - 5\times\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$. Dans tous ces cas, on vérifie que $s\times\delta = 4\pi$. La formule de Descartes, qui est valable pour tous les polyèdres même non réguliers, affirme plus généralement que la somme de tous les déficits angulaires vaut toujours 4π, c'est-à-dire, en notant δ_k le déficit angulaire au sommet numéro k,

$$\sum_{k=1}^{s} \delta_k = 4\pi\ .$$

Équivalence des deux formules. Pour voir que les formules d'Euler et de Descartes sont équivalentes, je note α_{jk} l'angle situé sur la face numéro j et au sommet numéro k, avec la convention que $\alpha_{jk} = 0$ si le sommet k n'est pas situé sur la face j. Cette convention permet d'affirmer que

$$\sum_{j=1}^{f} \alpha_{jk} = 2\pi - \delta_k \qquad \text{et que} \qquad \sum_{k=1}^{s} \alpha_{jk} = (n_j - 2)\,\pi$$

en notant n_j le nombre de côtés de la face numéro j. En sommant la première formule en k et la seconde en j, nous obtenons

$$\sum_{j,k} \alpha_{jk} = \sum_{k=1}^{s}(2\pi - \delta_k) = 2\,s\,\pi - \sum_{k=1}^{s}\delta_k$$

$$\text{et} \qquad \sum_{j,k} \alpha_{jk} = \sum_{j=1}^{f}(n_j - 2)\,\pi = \Big(\sum_{j=1}^{f} n_j\Big)\,\pi - 2\,f\,\pi = (2\,a - 2\,f)\,\pi$$

puisque, comme nous l'avons vu dans la preuve de la proposition, $\sum_{j=1}^{f} n_j = 2\,a$. Ces deux formules ensemble montrent finalement que $\sum_k \delta_k = 2\,(f+s-a)\,\pi$, et donc que les identités $\sum_k \delta_k = 4\pi$ et $f+s-a=2$ sont équivalentes. ∎

Une réciproque ? On peut formuler ainsi une réciproque de la formule de Descartes : *étant donnés un entier $s\geq 4$ et des angles δ_1, δ_2, ..., δ_s strictement compris entre 0 et 2π et de somme égale à 4π, existe-t-il un polyèdre convexe à s sommets dont les déficits angulaires sont les angles δ_k donnés ?* Je n'ai trouvé dans aucun livre cette question posée, ... et encore moins résolue ! Et pour ma part, je ne vois pas de contre-exemple évident.

Je ne sais résoudre ce problème que dans trois cas très particuliers. Le premier, c'est pour $s = n+1$ avec $n\geq 3$, et $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \dfrac{1}{n}(4\pi - \delta_{n+1})$; un polyèdre solution est alors fourni par une pyramide dont la base est un polygone régulier à n côtés, et dont les faces latérales sont des triangles isocèles d'angle au sommet égal à $\dfrac{1}{n}(2\pi - \delta_{n+1})$; en effet, cela fournit un déficit angulaire égal à δ_{n+1} au sommet de la pyramide, et comme les angles en bas des faces triangulaires valent chacun la moitié de $\pi - \dfrac{1}{n}(2\pi - \delta_{n+1})$ et que les angles du polygone formant la base valent chacun $\pi - \dfrac{2}{n}\pi$, le déficit angulaire en chaque sommet de la base vaut $\dfrac{1}{n}(4\pi - \delta_{n+1})$. Deuxième cas : pour $s = n+2$ avec $n\geq 3$ et $\delta_1 = \ldots = \delta_n = \dfrac{1}{n}(4\pi - \delta_{n+1} - \delta_{n+2})$, on peut trouver pour polyèdre solution une double pyramide du type précédent (variante du premier cas).

Le troisième cas particulier que je sais résoudre, c'est pour $s = 4$ et des δ_k quelconques de somme 4π, où l'on parvient à construire un polyèdre solution par des arguments de géométrie sphérique. Ce dernier cas m'a suggéré de raisonner par récurrence sur s : le cas $s = 4$ étant résolu, il ne reste plus qu'à montrer que si on sait résoudre le problème pour un certain $s \geq 4$, on sait aussi le faire pour $s + 1$; or en rangeant les déficits dans l'ordre décroissant, on montre facilement que $\delta_s + \delta_{s+1} < 2\pi$; par hypothèse de récurrence, j'ai donc un polyèdre à s sommets ayant des déficits angulaires égaux à $\delta_1, \ldots, \delta_{s-1}, \delta_s + \delta_{s+1}$; il ne resterait plus qu'à "dédoubler" le sommet de déficit $\delta_s + \delta_{s+1}$ pour en faire deux sommets de déficits δ_s et δ_{s+1}, mais je ne sais pas faire cette opération, car dès que l'on dédouble un sommet, tous les angles se mettent à bouger et rien ne reste constant !

Si quelqu'un a une idée pour une telle réciproque, je suis intéressé !

Appendice : des preuves des deux formules, et même d'une troisième

La formule de Girard. On appelle *polygone sphérique* toute figure dessinée sur une sphère et délimitée par des arcs de grands cercles. La *formule de Girard* est une formule reliant l'aire d'un polygone sphérique *convexe* (i.e. d'angles intérieurs $< \pi$) à ses angles : un polygone sphérique à n côtés et d'angles $(\beta_k)_{1\leq k\leq n}$, et dessiné sur une sphère de rayon r, a une aire égale à $\mathbf{A} = \big(\big(\sum_k \beta_k\big) - (n-2)\pi\big)\, r^2$. Cette formule de Girard s'obtient d'abord pour les polygones à deux côtés (fuseaux) dont l'aire est clairement proportionnelle à l'angle, puis pour les triangles sphériques en combinant des fuseaux dans une demi-sphère, et enfin pour tout polygone sphérique convexe à n côtés par partage d'un tel polygone en $n-2$ triangles sphériques.

Une preuve de la formule d'Euler. Pour prouver cette formule, on commence par choisir un point ω situé à l'intérieur du polyèdre, puis on projette, à partir de ce point et sur la sphère de rayon 1 centrée en ω, le réseau des arêtes du polyèdre, ce qui nous donne un découpage de la sphère en polygones sphériques $(P_j)_{1\leq j\leq f}$ avec la même combinatoire que celle du polyèdre de départ. On note β_{jk} l'angle (sur la sphère) du polygone P_j au sommet numéro k, avec la convention que $\beta_{jk} = 0$ si le sommet k n'est pas situé sur le polygone P_j. Cette convention permet d'affirmer que

$$\sum_{j=1}^{f} \beta_{jk} = 2\pi \qquad \text{et que} \qquad \sum_{k=1}^{s} \beta_{jk} = \mathbf{A}_j + (n_j - 2)\,\pi$$

où $\mathbf{A}_j$ désigne l'aire du polygone sphérique P_j, et n_j le nombre de ses côtés (grâce à la formule de Girard). En sommant la première formule en k et la seconde en j, nous obtenons

$$2\,s\,\pi = \sum_{j,k} \beta_{jk} = \sum_{j=1}^{f} \big(\mathbf{A}_j + (n_j - 2)\,\pi\big) = 4\pi + 2\,a\,\pi - 2\,f\,\pi\ ,$$

d'où la formule d'Euler après division par 2π. ■

Une preuve de la formule de Descartes. C'est la même preuve que celle donnée dans notre prologue pour la somme des angles extérieurs d'un polygone : à partir d'un point central ω, on abaisse des plans perpendiculaires aux arêtes du polyèdre. Ces plans font entre eux des angles dièdres que l'on peut estimer en en regardant la trace sur la face numéro j : c'est un angle $\gamma_{jk} = \pi - \alpha_{jk}$ (et on garde la convention que $\gamma_{jk} = 0$ si le sommet k n'est pas sur la face j) ; ces plans découpent en outre la sphère centrée en ω et de rayon 1 en polygones sphériques $(Q_k)_{1\leq k\leq s}$ correspondant aux sommets du polyèdre, et dont les angles sont les γ_{jk} ; la formule de Girard permet alors de voir que l'aire $\mathbf{B}_k$ du polygone sphérique Q_k vaut

$$\mathbf{B}_k = \Big(\sum_j \gamma_{jk}\Big) - (m_k - 2)\,\pi = m_k\,\pi - \Big(\sum_j \alpha_{jk}\Big) - m_k\,\pi + 2\pi = \delta_k\ \ ;$$

on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{s} \delta_k = \sum_{k=1}^{s} \mathbf{B}_k = 4\pi\ ,$$

ce qui est la formule voulue. ■