Xavier Saint Raymond

Le problème d'Adrien

<u>Énoncé du problème</u>. Deux nombres compris entre 2 et 100 ont été choisis, et on a communiqué leur somme à Anne et leur produit à Bertrand. Ils tiennent le dialogue suivant :
Bertrand. − Je ne puis trouver d'emblée les deux nombres de départ.
Anne. − Je savais que tu serais dans cette situation.
Bertrand. − Alors je peux en déduire quels sont ces deux nombres.
Anne. − Alors moi aussi.
Et vous ? sauriez-vous déterminer ces deux nombres ?

<u>Une solution</u>. Dans la discussion qui suit, je note $S \in [4, 200]$ la somme des deux nombres inconnus, et $P \in [4, 10\,000]$ leur produit ; en outre, j'appellerai *décomposition de* S toute décomposition de S *en somme* de deux nombres compris entre 2 et 100, et *décomposition de* P toute décomposition de P *en produit* de deux nombres compris entre 2 et 100.

<u>Première information</u>. La première déclaration de Bertrand nous apprend que le produit P admet plusieurs décompositions distinctes. Ainsi, ce produit ne peut pas être de l'un des types suivants :
(a) P est un produit de deux nombres premiers.
(b) P possède un facteur premier $q > 50$.
(c) $P \in \{ 578 , 9\,800 , 9\,801 , 9\,900 , 10\,000 \}$.
En effet, quand $P = q \times r$ avec q et r premiers, il y a une seule décomposition possible ; quand P possède un facteur premier $q > 50$ et que $P = m \times n$ en est une décomposition, alors q divise m ou n, disons m, et comme m est inférieur à 100, on a même $q = m$, si bien que P n'a qu'une seule décomposition ; enfin, si $P = 578 = 2 \times 17^2$ sa seule décomposition est $P = 17 \times 34$, et si $P = 9\,800 = 98 \times 100$ ou $P = 9\,801 = 99 \times 99$ ou $P = 9\,900 = 99 \times 100$ ou $P = 10\,000 = 100 \times 100$ les décompositions de ces produits sont aussi clairement uniques.

<u>Deuxième information</u>. La réponse d'Anne montre que la somme S (qu'elle connaît) ne possède aucune décomposition conduisant à un produit “interdit” du type (a), (b) ou (c) ci-dessus. On en déduit que :
(d) La somme S vérifie $4 \le S \le 54$.
(e) La somme S est impaire, mais pas de la forme $q + 2$ avec q premier.
(f) La somme S ne vaut pas 51.
En effet, si $55 \le S \le 153$, on a $S = 53 + n$ avec $2 \le n \le 100$, ce qui est une décomposition conduisant à un produit interdit de type (b) puisque 53 est un nombre premier > 50 ; de même si $154 \le S \le 197$, on a la décomposition $S = 97 + n$ conduisant à un produit interdit de type (b) puisque 97 est un nombre premier > 50 ; enfin, si $198 \le S \le 200$, les seules décompositions de S conduisent à l'un des produits 9 800, 9 801, 9 900, ou 10 000 interdits car figurant dans la liste (c). On sait de plus que tous les nombres S pairs compris entre 4 et 54 sont sommes de deux nombres premiers, et possèdent donc une décomposition conduisant à un produit interdit de type (a), et de même pour tous les nombres $S = q + 2$ avec q premier. Et pour terminer, la somme $S = 51$ possède la décomposition $51 = 17 + 34$ conduisant au produit 578 interdit car figurant dans la liste (c).

On fait alors la liste de toutes les sommes S satisfaisant aux contraintes (d)-(e)-(f) ci-dessus, et on en déduit que S figure dans la liste

$$\Sigma = \{ 11 , 17 , 23 , 27 , 29 , 35 , 37 , 41 , 47 , 53 \} .$$

Troisième information. La deuxième affirmation de Bertrand nous apprend que parmi les différentes décompositions de son produit P, une et une seule conduit à une somme figurant dans la liste Σ. Il serait trop long de faire la liste de tous les produits P satisfaisant à cette exigence, mais nous allons donner deux listes (non complètes) de produits : (i) satisfaisant à cette exigence ; et (ii) n'y satisfaisant pas. Nous indiquons en face les sommes correspondantes, et signalons les décompositions conduisant à des sommes figurant dans la liste Σ par des caractères gras.

(i) *Produits satisfaisant à la troisième information (liste incomplète) :*

$18 = \mathbf{2} \times \mathbf{9} = 3 \times 6$	pour des sommes : **11**, 9.
$24 = 2 \times 12 = \mathbf{3} \times \mathbf{8} = 4 \times 6$	pour des sommes : 14, **11**, 10.
$50 = \mathbf{2} \times \mathbf{25} = 5 \times 10$	pour des sommes : **27**, 15.
$52 = 2 \times 26 = \mathbf{4} \times \mathbf{13}$	pour des sommes : 28, **17**.
$54 = \mathbf{2} \times \mathbf{27} = 3 \times 18 = 6 \times 9$	pour des sommes : **29**, 21, 12.
$76 = 2 \times 38 = \mathbf{4} \times \mathbf{19}$	pour des sommes : 40, **23**.
$92 = 2 \times 46 = \mathbf{4} \times \mathbf{23}$	pour des sommes : 48, **27**.
$114 = 2 \times 57 = \mathbf{3} \times \mathbf{38} = 6 \times 19$	pour des sommes : 59, **41**, 25.
$124 = 2 \times 62 = \mathbf{4} \times \mathbf{31}$	pour des sommes : 64, **35**.
$130 = 2 \times 65 = 5 \times 26 = \mathbf{10} \times \mathbf{13}$	pour des sommes : 67, 31, **23**.
$138 = 2 \times 69 = 3 \times 46 = \mathbf{6} \times \mathbf{23}$	pour des sommes : 71, 49, **29**.
$148 = 2 \times 74 = \mathbf{4} \times \mathbf{37}$	pour des sommes : 78, **41**.
$172 = 2 \times 86 = \mathbf{4} \times \mathbf{43}$	pour des sommes : 88, **47**.
$174 = 2 \times 87 = 3 \times 58 = \mathbf{6} \times \mathbf{29}$	pour des sommes : 89, 61, **35**.
$186 = 2 \times 93 = 3 \times 62 = \mathbf{6} \times \mathbf{31}$	pour des sommes : 95, 65, **37**.
$232 = 2 \times 116 = 4 \times 58 = \mathbf{8} \times \mathbf{29}$	pour des sommes : 118, 62, **37**.
$246 = 2 \times 123 = 3 \times 82 = \mathbf{6} \times \mathbf{41}$	pour des sommes : 125, 85, **47**.
$282 = 2 \times 141 = 3 \times 94 = \mathbf{6} \times \mathbf{47}$	pour des sommes : 143, 97, **53**.
$430 = 2 \times 215 = 5 \times 86 = \mathbf{10} \times \mathbf{43}$	pour des sommes : 217, 91 ; **53**.

(ii) *Produits ne satisfaisant pas à la troisième information (liste incomplète) :*

$30 = \mathbf{2} \times \mathbf{15} = 3 \times 10 = \mathbf{5} \times \mathbf{6}$	pour des sommes : **17**, 13, **11**.
$42 = \mathbf{2} \times \mathbf{21} = \mathbf{3} \times \mathbf{14} = 6 \times 7$	pour des sommes : **23**, **17**, 13.
$60 = 2 \times 30 = \mathbf{3} \times \mathbf{20} = 4 \times 15 = \mathbf{5} \times \mathbf{12} = 6 \times 10$	pour des sommes : 32, **23**, 19, **17**, 16.
$66 = \mathbf{2} \times \mathbf{33} = 3 \times 22 = \mathbf{6} \times \mathbf{11}$	pour des sommes : **35**, 25, **17**.
$70 = \mathbf{2} \times \mathbf{35} = 5 \times 14 = \mathbf{7} \times \mathbf{10}$	pour des sommes : **37**, 19, **17**.
$72 = 2 \times 36 = \mathbf{3} \times \mathbf{24} = 4 \times 18 = 6 \times 12 = \mathbf{8} \times \mathbf{9}$	pour des sommes : 38, **27**, 22, 18, **17**.

Quatrième information. La dernière réplique d'Anne nous apprend que, parmi les décompositions de sa somme S, une et une seule conduit à un produit satisfaisant à la troisième information. En regardant la liste (i) ci-dessus, on voit que cette somme ne peut donc pas être 11 ($\rightarrow$ produits 18 et 24), ni 23 ($\rightarrow$ produits 76 et 130), ni 27 ($\rightarrow$ produits 50 et 92), ni 29 ($\rightarrow$ produits 54 et 138), ni 35 ($\rightarrow$ produits 124 et 174), ni 37 ($\rightarrow$ produits 186 et 232), ni 41 ($\rightarrow$ produits 114 et 148), ni 47 ($\rightarrow$ produits 172 et 246), ni 53 ($\rightarrow$ produits 282 et 430) ; la somme ne peut donc être que $S = 17$.

Il reste à vérifier que la somme $S = 17$ convient : elle admet les décompositions $17 = 2 + 15 = 3 + 14 = \mathbf{4} + \mathbf{13} = 5 + 12 = 6 + 11 = 7 + 10 = 8 + 9$ qui conduisent respectivement aux produits 30, 42, **52**, 60, 66, 70, 72, lesquels figurent tous dans la liste (ii) des produits ne satisfaisant pas à la troisième information, sauf 52 (provenant de la décomposition $17 = 4 + 13$) qui figure, lui, dans la liste (i) des produits satisfaisant à la troisième information.

Conclusion. Les deux nombres cherchés étaient donc 4 et 13, Anne avait reçu la somme $S = 17$, et Bertrand le produit $P = 52$.