K2M
Seconde liste de questions...
2 novembre 2015

1. Soit n un entier naturel ≥ 2, E un ensemble de cardinal n, et f une application de E dans E.

   Peut-on déterminer une condition nécessaire et suffisante $\mathcal{C}(n,f)$ pour qu'il existe une application g de E dans E telle que $g \circ g = f$?

2. a) Est-il possible de paver le plan avec des triangles deux-à-deux non semblables ?

   b) Est-il possible de paver le plan avec des triangles isocèles deux-à-deux non semblables ?

3. Soit $m \in \mathbb{R}$ et P un polynôme à coefficients réels.
   On suppose : $\forall x \in \mathbb{R} \;\; P(x) \geq m$.

   P atteint-il sa borne inférieure ?

4. Soit $\mathbb{U}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, et $P \in \mathbb{C}[X]$.
   On suppose que $P(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{U}$.

   Que peut-on en déduire sur P ?

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la parité de $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$?

6. Soit ABC et DEF deux triangles inscrits dans le même cercle $\mathcal{C}$ pour lesquels on a :

   $$\sin(\hat{A}) + \sin(\hat{B}) + \sin(\hat{C}) = \sin(\hat{D}) + \sin(\hat{E}) + \sin(\hat{F}) \quad ?$$

   Que signifie "plus géométriquement" cette égalité ?

7. Soit P un point quelconque d'une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F_1 et F_2, $\mathcal{T}_P$ la tangente à $\mathcal{E}$ en P et d_P la distance du centre O de l'ellipse à $\mathcal{T}_P$.

   Que peut-on dire du produit $PF_1 \times PF_2 \times d_P^2$?

8. Soit n un entier naturel ≥ 2. La somme $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ peut-elle être entière ?

9. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et (P_n) une suite de polynômes à coefficients réels qui converge **uniformément** sur $\mathbb{R}$ vers f.

   Peut-on en déduire que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$?

10. Si P est un polynôme de degré d, on sait que $\forall m \geq (d+1) \quad P^{(m)} =$ polynôme nul.
    Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivable, telle que :

    $$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists n(x) \in \mathbb{N} \;\; f^{(n(x))} = 0.$$

    Que peut-on en déduire sur f ?