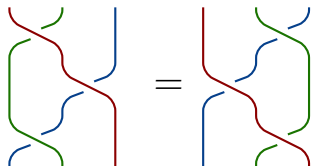


Une histoire de deux groupes qui valent mieux qu'un

Victoria LEBED, Université de Caen Normandie

Colloquium Mathématique
Strasbourg, 2025



1

Une équation omniprésente 1

Données : e.v. V , $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$. **Ex.** : twist $\sigma(a \otimes b) = (b \otimes a)$.

L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_V, \quad \sigma_2 = \text{Id}_V \otimes \sigma.$$

Données : e.v. V , $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$. **Ex.** : twist $\sigma(a \otimes b) = (b \otimes a)$.

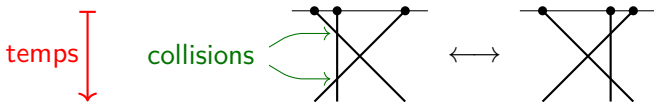
L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 : V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_V, \quad \sigma_2 = \text{Id}_V \otimes \sigma.$$

Les **physiciens** voient :

✓ la condition de factorisation pour la matrice de dispersion dans le problème à n corps en dim. 1 (McGuire & Yang 60') ;



Données : e.v. V , $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$. **Ex.** : twist $\sigma(a \otimes b) = (b \otimes a)$.

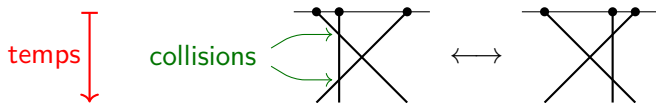
L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 : V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_V, \quad \sigma_2 = \text{Id}_V \otimes \sigma.$$

Les **physiciens** voient :

✓ la condition de factorisation pour la matrice de dispersion dans le problème à n corps en dim. 1 (*McGuire & Yang 60'*) ;



✓ la condition d'intégrabilité pour la fonction de partition d'un **modèle sur réseau** (*Onsager '44; Baxter 70'*) ;

✓ la condition de factorisabilité pour la S-matrice d'une **2-QFT** (*Zamolodchikov '79*).

Données : e.v. V , $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$. **Ex.** : twist $\sigma(a \otimes b) = (b \otimes a)$.

L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_V, \quad \sigma_2 = \text{Id}_V \otimes \sigma.$$

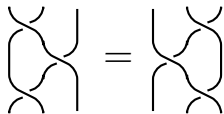
Les **topologues** voient :

✓ L'équation de tresses, ou le mouvement de Reidemeister III (nœuds).

$$\sigma \longleftrightarrow \text{diagram of a crossing}$$



YBE \longleftrightarrow



vidéo

Données : e.v. V , $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$. **Ex. :** twist $\sigma(a \otimes b) = (b \otimes a)$.

L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$\sigma_1 = \sigma \otimes \text{Id}_V, \quad \sigma_2 = \text{Id}_V \otimes \sigma.$$

Les **topologues** voient :

✓ L'équation de tresses, ou le mouvement de Reidemeister III (nœuds).

$$\sigma \leftrightarrow \text{diagram} \quad \Downarrow \quad \text{YBE} \leftrightarrow \text{diagram} = \text{diagram}$$

The diagram on the left shows a crossing of two strands, with a double-headed arrow between the symbol σ and the crossing. A red downward arrow points from this crossing to the YBE equation. The YBE equation is represented by two diagrams of three strands separated by an equals sign. The first diagram shows a crossing between the top and middle strands, followed by a crossing between the middle and bottom strands. The second diagram shows a crossing between the middle and bottom strands, followed by a crossing between the top and middle strands.

vidéo

Le monoïde/groupe de tresses $B_n^{(+)}$ agit sur $V^{\otimes n} \rightsquigarrow$ représentations.

- ✓ Physiciens et topologues : **construire** des solutions intéressantes.
 - ~> groupes quantiques

3 Rêves

- ✓ Physiciens et topologues : **construire** des solutions intéressantes.
 \leadsto groupes quantiques
- ✓ Algébristes : **classifier** les solutions.

✓ Physiciens et topologues : **construire** des solutions intéressantes.

~> groupes quantiques

✓ Algébristes : **classifier** les solutions.

- $V = \mathbb{R}^n$

- $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2} \rightsquigarrow$ matrice $n^2 \times n^2 \rightsquigarrow n^4$ variables

- $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3} \rightsquigarrow n^6$ relations polynomiales

✓ Physiciens et topologues : **construire** des solutions intéressantes.

~> groupes quantiques

✓ Algébristes : **classifier** les solutions.

- $V = \mathbb{R}^n$

- $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2} \rightsquigarrow$ matrice $n^2 \times n^2 \rightsquigarrow n^4$ variables

- $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3} \rightsquigarrow n^6$ relations polynomiales

$n = 2$: bases de Gröbner \rightsquigarrow 96 (classes de) solutions (*Hietarinta '92*).

$n = 3$: seulement un type de solutions (*Hietarinta, Martin, Rowell '24*).

✓ Physiciens et topologues : **construire** des solutions intéressantes.

~> groupes quantiques

✓ Algébristes : **classifier** les solutions.

- $V = \mathbb{R}^n$

- $\sigma: V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2} \rightsquigarrow$ matrice $n^2 \times n^2 \rightsquigarrow n^4$ variables

- $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2: V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3} \rightsquigarrow n^6$ relations polynomiales

$n = 2$: bases de Gröbner \rightsquigarrow 96 (classes de) solutions (*Hietarinta '92*).

$n = 3$: seulement un type de solutions (*Hietarinta, Martin, Rowell '24*).

On a besoin de plus de structure...

Approche de *Drinfel'd* (90') :

Étape 1. Classifier les solutions ensemblistes $r: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$.

Projet réaliste pour un ordinateur.

Approche de *Drinfel'd* (90') :

Étape 1. Classifier les solutions ensemblistes $r: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$.

Projet réaliste pour un ordinateur.

Étape 2. Comprendre leur déformations :

sol. ens. (S, r) $\xrightarrow{\text{linéariser} + \text{déformer}}$ sol. lin. $(\mathbb{R}S, \tilde{r})$.

Approche de *Drinfel'd* (90') :

Étape 1. Classifier les solutions ensemblistes $r: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$.

Projet réaliste pour un ordinateur.

Étape 2. Comprendre leur déformations :

sol. ens. (S, r) $\xrightarrow{\text{linéariser} + \text{déformer}}$ sol. lin. $(\mathbb{R}S, \tilde{r})$.

Exemple : twist \rightsquigarrow R-matrices (groupes quantiques).

Approche de *Drinfel'd* (90') :

Étape 1. Classifier les solutions ensemblistes $r: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$.

Projet réaliste pour un ordinateur.

Étape 2. Comprendre leur déformations :

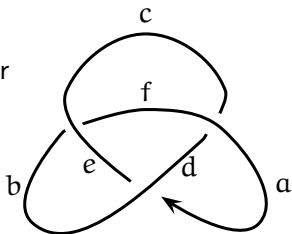
sol. ens. (S, r) $\xrightarrow{\text{linéariser} + \text{déformer}}$ sol. lin. $(\mathbb{R}S, \tilde{r})$.

Exemple : twist \rightsquigarrow R-matrices (groupes quantiques).

Physiciens : 😞

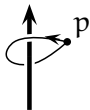
Topologues : 😊

(S, r) -coloriages pour
les diagrammes
de nœuds :

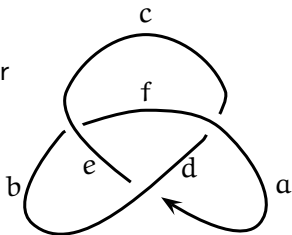


$$r(a, b) = (\lambda_a(b), \rho_b(a))$$

cf. la présentation
de Wirtinger
pour $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$:



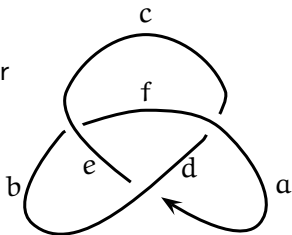
(S, r) -coloriages pour
les diagrammes
de nœuds :



$$r(a, b) = (\lambda_a(b), \rho_b(a))$$

Proposition : (S, r) solution ensembliste inversible “gentille” de l’YBE \Rightarrow
 $\#\{(S, r)\text{-coloriages de diagrammes}\}$ est un invariant de nœuds.

(S, r) -coloriages pour
les diagrammes
de nœuds :



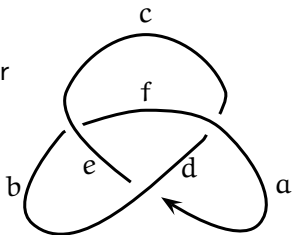
$$r(a, b) = (\lambda_a(b), \rho_b(a))$$

Proposition : (S, r) solution ensembliste inversible “gentille” de l’YBE \Rightarrow
 $\#\{(S, r)\text{-coloriages de diagrammes}\}$ est un invariant de nœuds.

Exemple (Fox 50') : $(\mathbb{Z}_3, r(a, b) = (b, 2b - a))$



(S, r) -coloriages pour
les diagrammes
de nœuds :



$$r(a, b) = (\lambda_a(b), \rho_b(a))$$

Proposition : (S, r) solution ensembliste inversible “gentille” de l’YBE \Rightarrow
 $\#\{(S, r)\text{-coloriages de diagrammes}\}$ est un invariant de nœuds.

Exemple (Fox 50') : $(\mathbb{Z}_3, r(a, b) = (b, 2b - a))$



3 coloriages



9 coloriages

Théorème (*Joyce & Matveev '82*):

$$\# \text{Col}_S(D) = \# \text{Hom}_{\text{Sol}}(Q(K), S)$$

- ✓ $Q(K)$ = le quandle fondamental de K
(un invariant de nœuds universel faible) ;

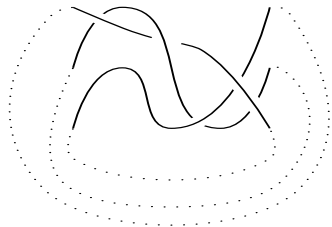
Théorème (*Joyce & Matveev '82*):

$$\# \text{Col}_S(D) = \# \text{Hom}_{\text{Sol}}(Q(K), S) = \text{Tr}(\rho_S(\beta))$$

- ✓ $Q(K)$ = le quandle fondamental de K
(un invariant de nœuds universel faible) ;
- ✓ $\text{fermeture}(\beta) = K$;
- ✓ $\rho_S: B_n \rightarrow \text{Aut}(S^n)$ est la représentation induite par (S, r) .



fermeture
→



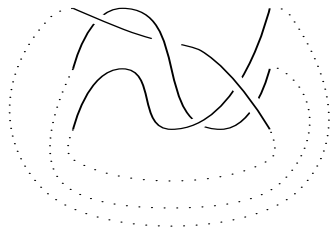
Théorème (*Joyce & Matveev '82*):

$$\# \text{Col}_S(D) = \# \text{Hom}_{\text{Sol}}(Q(K), S) = \text{Tr}(\rho_S(\beta))$$

- ✓ $Q(K)$ = le quandle fondamental de K
(un invariant de nœuds universel faible) ;
- ✓ fermeture(β) = K ;
- ✓ $\rho_S: B_n \rightarrow \text{Aut}(S^n)$ est la représentation induite par (S, r) .



fermeture

En pratique : 26 solutions distinguent tous les 2977 nœuds premiers avec ≤ 12 croisements (*Clark, Elhamdadi, Saito, Yeatman '14*).



Quelques solutions

Involutives, $r^2 = \text{Id}$:

- $r(x, y) = (y, x)$  R-matrices.

7 Quelques solutions

Involutives, $r^2 = \text{Id}$:

• $r(x, y) = (y, x) \rightsquigarrow$ R-matrices.

• $r(x, y) = (y, x) \rightsquigarrow \sigma(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y],$

où $(V, [])$ est une algèbre de Lie, et $\forall v, [1, v] = [v, 1] = 0.$

YBE pour $\sigma \iff$ identité de Jacobi pour $[]$

Involutives, $r^2 = \text{Id}$:

• $r(x, y) = (y, x) \rightsquigarrow$ R-matrices.

• $r(x, y) = (y, x) \rightsquigarrow \sigma(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y],$

où $(V, [])$ est une algèbre de Lie, et $\forall v, [1, v] = [v, 1] = 0.$

YBE pour $\sigma \iff$ identité de Jacobi pour $[]$

• $r(x, y) = (f(y), f^{-1}(x)),$ où $f \in \text{Bij}(X).$

Involutives, $r^2 = \text{Id}$:

• $r(x, y) = (y, x) \rightsquigarrow$ R-matrices.

• $r(x, y) = (y, x) \rightsquigarrow \sigma(x \otimes y) = y \otimes x + \hbar 1 \otimes [x, y],$

où $(V, [])$ est une algèbre de Lie, et $\forall v, [1, v] = [v, 1] = 0.$

YBE pour $\sigma \iff$ identité de Jacobi pour $[]$

• $r(x, y) = (f(y), f^{-1}(x)),$ où $f \in \text{Bij}(X).$

De type quandle :

• $r(x, y) = (y, y^{-1}xy),$ où S est un groupe.

• $r(x, y) = (y, tx + (1 - t)y),$ où $S \in \text{Mod}_{\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]}$.

7 Quelques solutions

Idempotentes : $\sigma^2 = \sigma$:

- $r(x, y) = (1, x * y)$, où S est un monoïde.

YBE pour $r \iff$ associativité pour $*$

Idempotentes : $\sigma^2 = \sigma$:

- $r(x, y) = (1, x * y)$, où S est un **monoïde**.

YBE pour $r \iff$ associativité pour $*$

- **Monoïde factorisé** $G = HK$,

$$S = H \cup K, \quad r(x, y) = (h, k), \quad h \in H, k \in K, hk = xy.$$

Idempotentes : $\sigma^2 = \sigma$:

- $r(x, y) = (1, x * y)$, où S est un **monoïde**.

YBE pour $r \iff$ associativité pour $*$

- **Monoïde factorisé** $G = HK$,
 $S = H \cup K$, $r(x, y) = (h, k)$, $h \in H$, $k \in K$, $hk = xy$.
- **Réseau** (S, \wedge, \vee) , $r(x, y) = (x \wedge y, x \vee y)$.

Idempotentes : $\sigma^2 = \sigma$:

- $r(x, y) = (1, x * y)$, où S est un **monoïde**.

YBE pour $r \iff$ associativité pour $*$

- **Monoïde factorisé** $G = HK$,
 $S = H \cup K$, $r(x, y) = (h, k)$, $h \in H$, $k \in K$, $hk = xy$.
- **Réseau** (S, \wedge, \vee) , $r(x, y) = (x \wedge y, x \vee y)$.
- L'algorithme de Schensted pour les **tableaux de Young**.

Données : ens. S , $r: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$. **Ex.** : twist $r(a, b) = (b, a)$.

L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2: S^{\times 3} \rightarrow S^{\times 3}$$

$$r_1 = r \times \text{Id}_S, r_2 = \text{Id}_S \times r.$$

Les algébristes voient : une commutativité déformée.

Données : ens. S , $r: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$. **Ex.** : **twist** $r(a, b) = (b, a)$.

L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2: S^{\times 3} \rightarrow S^{\times 3} \quad r_1 = r \times \text{Id}_S, r_2 = \text{Id}_S \times r.$$

Les **algébristes** voient : une commutativité déformée.

Le **groupe de structure** (= groupe associé = groupe enveloppant) :

$$\text{Grp}(S, r) = \langle e_x, x \in S \mid e_x e_y = e_{y'} e_{x'} \text{ quand } r(x, y) = (y', x') \rangle$$

Données : ens. S , $r: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$. **Ex.** : **twist** $r(a, b) = (b, a)$.

L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2: S^{\times 3} \rightarrow S^{\times 3} \quad r_1 = r \times \text{Id}_S, r_2 = \text{Id}_S \times r.$$

Les **algébristes** voient : une commutativité déformée.

Le **groupe de structure** (= groupe associé = groupe enveloppant) :

$$\text{Grp}(S, r) = \langle e_x, x \in S \mid e_x e_y = e_{y'} e_{x'} \text{ quand } r(x, y) = (y', x') \rangle$$

✓ Un invariant de solutions.

Données : ens. S , $r: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$. **Ex.** : **twist** $r(a, b) = (b, a)$.

L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2: S^{\times 3} \rightarrow S^{\times 3} \quad r_1 = r \times \text{Id}_S, r_2 = \text{Id}_S \times r.$$

Les **algébristes** voient : une commutativité déformée.

Le **groupe de structure** (= groupe associé = groupe enveloppant) :

$$\text{Grp}(S, r) = \langle e_x, x \in S \mid e_x e_y = e_{y'} e_{x'} \text{ quand } r(x, y) = (y', x') \rangle$$

- ✓ Un invariant de solutions.
- ✓ Une source de groupes déformant les groupes abéliens libres.

Données : ens. S , $r: S^{\times 2} \rightarrow S^{\times 2}$. **Ex.** : **twist** $r(a, b) = (b, a)$.

L'équation de Yang–Baxter (YBE) :

$$r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2: S^{\times 3} \rightarrow S^{\times 3} \quad r_1 = r \times \text{Id}_S, r_2 = \text{Id}_S \times r.$$

Les **algébristes** voient : une commutativité déformée.

Le **groupe de structure** (= groupe associé = groupe enveloppant) :

$$\text{Grp}(S, r) = \langle e_x, x \in S \mid e_x e_y = e_y e_x, \text{ quand } r(x, y) = (y', x') \rangle$$

- ✓ Un invariant de solutions.
- ✓ Une source de groupes déformant les groupes abéliens libres.

Théorème : (S, r) une solution involutive “raisonnable” \Rightarrow
 $\text{Grp}(S, r)$ est **Bieberbach** (*Gateva-Ivanova, Van den Bergh '98*)
 et **Garside** (*Chouraqui '10*).

$$\text{Grp}(S, r) = \langle e_x, x \in S \mid e_x e_y = e_{y'} e_{x'} \text{ quand } r(x, y) = (y', x') \rangle$$

Exemples :

- $r(x, y) = (y, x)$, $\text{Grp}(S, r) \cong \mathbb{Z}^{\#S}$;

$$\text{Grp}(S, r) = \langle e_x, x \in S \mid e_x e_y = e_{y'} e_{x'} \text{ quand } r(x, y) = (y', x') \rangle$$

Exemples :

- $r(x, y) = (y, x)$, $\text{Grp}(S, r) \cong \mathbb{Z}^{\#S}$;
- groupe $(S, *, 1)$, $r(x, y) = (1, x * y)$, $\text{Grp}(S, r) \cong S \times \mathbb{Z}$;

$$\text{Grp}(S, r) = \langle e_x, x \in S \mid e_x e_y = e_{y'} e_{x'} \text{ quand } r(x, y) = (y', x') \rangle$$

Exemples :

- $r(x, y) = (y, x)$, $\text{Grp}(S, r) \cong \mathbb{Z}^{\#S}$;
- groupe $(S, *, 1)$, $r(x, y) = (1, x * y)$, $\text{Grp}(S, r) \cong S \times \mathbb{Z}$;
- algèbre de Lie $(V, [], 1)$, $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x + 1 \otimes [x, y]$,
 $\mathbb{k} \text{ Mon}(V, \sigma) / (1 = 1_{\text{Mon}}) \cong \text{UEA}(V, [], \mathbb{k})$;

$$\text{Grp}(S, r) = \langle e_x, x \in S \mid e_x e_y = e_{y'} e_{x'} \text{ quand } r(x, y) = (y', x') \rangle$$

Exemples :

- $r(x, y) = (y, x)$, $\text{Grp}(S, r) \cong \mathbb{Z}^{\#S}$;
- groupe $(S, *, 1)$, $r(x, y) = (1, x * y)$, $\text{Grp}(S, r) \cong S \times \mathbb{Z}$;
- algèbre de Lie $(V, [], 1)$, $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x + 1 \otimes [x, y]$,
 $\mathbb{k} \text{ Mon}(V, \sigma) / (1 = 1_{\text{Mon}}) \simeq \text{UEA}(V, [], \mathbb{k})$;
- $S = \mathbb{Z}_2$, $r(x, y) = (y + 1, x - 1)$, $\text{Grp}(S, r) \cong \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$.

$$\text{Grp}(S, r) = \langle e_x, x \in S \mid e_x e_y = e_{y'} e_{x'} \text{ quand } r(x, y) = (y', x') \rangle$$

Exemples :

- $r(x, y) = (y, x)$, $\text{Grp}(S, r) \cong \mathbb{Z}^{\#S}$;
- groupe $(S, *, 1)$, $r(x, y) = (1, x * y)$, $\text{Grp}(S, r) \cong S \times \mathbb{Z}$;
- algèbre de Lie $(V, [], 1)$, $\sigma(x \otimes y) = y \otimes x + 1 \otimes [x, y]$,
 $\mathbb{k} \text{ Mon}(V, \sigma) / (1 = 1_{\text{Mon}}) \simeq \text{UEA}(V, [], \mathbb{k})$;
- $S = \mathbb{Z}_2$, $r(x, y) = (y + 1, x - 1)$, $\text{Grp}(S, r) \cong \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$.

$$\langle a, b \mid ab = ba \rangle \xrightarrow{\text{déformation}} \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$$

$$\mathbb{R}^2/G \cong$$



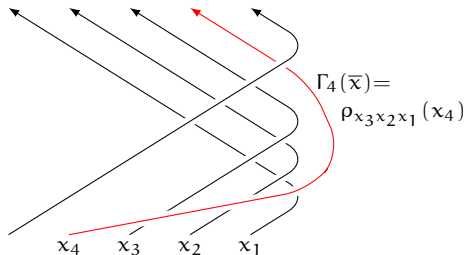
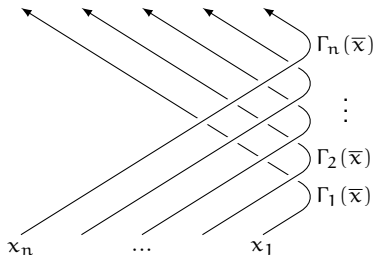
10

Un **groupe** de structure ?

Application guitare

$$\Gamma: S^{\times n} \longrightarrow S^{\times n},$$

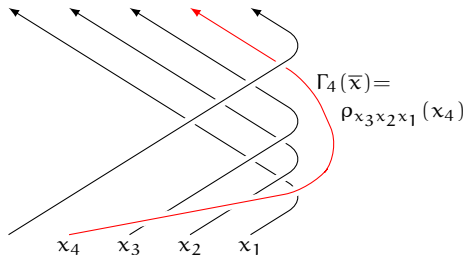
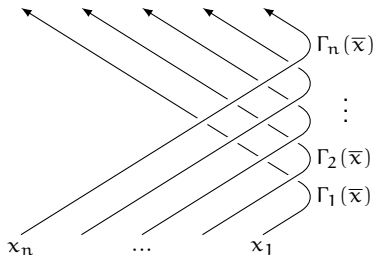
$$(x_n, \dots, x_1) \longmapsto (\dots, \rho_{x_2 x_1}(x_3), \rho_{x_1}(x_2), x_1).$$



Application guitare

$$\Gamma: \mathcal{S}^{\times n} \longrightarrow \mathcal{S}^{\times n},$$

$$(x_n, \dots, x_1) \longmapsto (\dots, \rho_{x_2 x_1}(x_3), \rho_{x_1}(x_2), x_1).$$



Théorème (*Etingof, Schedler, Soloviev '99, L., Vendramin '17*) :

r bijective non-dégénérée (les ρ_x et λ_y sont bijectives) \implies

- Γ bijective ;

- $\Gamma r_i = r'_i \Gamma$

où r' est la **solution dérivée** de r ,

de type quandle : $r'(x, y) = (y, x * y)$;

Application guitare

$$\Gamma: S^{\times n} \longrightarrow S^{\times n},$$

$$(x_n, \dots, x_1) \longmapsto (\dots, \rho_{x_2 x_1}(x_3), \rho_{x_1}(x_2), x_1).$$

Théorème (*Etingof, Schedler, Soloviev '99, L., Vendramin '17*) :

r bijective non-dégénérée (les ρ_x et λ_y sont bijectives) \implies

• Γ bijective ;

• $\Gamma r_i = r'_i \Gamma$ où r' est la **solution dérivée** de r ,
de type quandle : $r'(x, y) = (y, x * y)$;

• $r' = \text{twist} \Leftrightarrow r^2 = \text{Id}$;

Application guitare

$$\Gamma: S^{\times n} \longrightarrow S^{\times n},$$

$$(x_n, \dots, x_1) \longmapsto (\dots, \rho_{x_2 x_1}(x_3), \rho_{x_1}(x_2), x_1).$$

Théorème (Etingof, Schedler, Soloviev '99, L., Vendramin '17) :

r bijective non-dégénérée (les ρ_x et λ_y sont bijectives) \implies

- Γ bijective ;
- $\Gamma r_i = r'_i \Gamma$ où r' est la solution dérivée de r ,
de type quandle : $r'(x, y) = (y, x * y)$;
- $r' = \text{twist} \Leftrightarrow r^2 = \text{Id}$;
- Γ induit un 1-cocycle de groupes bijectif

$$\Gamma: \text{Grp}(S, r) \xrightarrow{1:1} \text{Grp}(S, r')$$

$$\Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b).$$

Application guitare

$$\Gamma: S^{\times n} \longrightarrow S^{\times n},$$

$$(x_n, \dots, x_1) \longmapsto (\dots, \rho_{x_2 x_1}(x_3), \rho_{x_1}(x_2), x_1).$$

Théorème (Etingof, Schedler, Soloviev '99, L., Vendramin '17) :

r bijective non-dégénérée (les ρ_x et λ_y sont bijectives) \implies

- Γ bijective ;
- $\boxed{\Gamma r_i = r'_i \Gamma}$ où r' est la **solution dérivée** de r ,
de type quandle : $r'(x, y) = (y, x * y)$;
- $r' = \text{twist} \Leftrightarrow r^2 = \text{Id}$;
- Γ induit un **1-cocycle de groupes bijectif**

$$\boxed{\Gamma: \text{Grp}(S, r) \xrightarrow{1:1} \text{Grp}(S, r')} \quad \Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b).$$

Exemple : $S = \mathbb{Z}_2$, $r(x, y) = (y + 1, x - 1)$, $r^2 = \text{Id}$, $r' = \text{twist}$,

$$\Gamma: \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle \xrightarrow{1:1} \mathbb{Z}^2.$$

Théorème (*Etingof, Schedler, Soloviev '99, L., Vendramin '17*) :

r bijective non-dégénérée (les ρ_x et λ_y sont bijectives) \implies

- Γ bijective ;
- $\Gamma r_i = r'_i \Gamma$ où r' est la **solution dérivée** de r ,
de type quandle : $r'(x, y) = (y, x * y)$;
- $r' = \text{twist} \Leftrightarrow r^2 = \text{Id}$;
- Γ induit un **1-cocycle de groupes bijectif**

$$\Gamma: \text{Grp}(S, r) \xrightarrow{1:1} \text{Grp}(S, r') \quad \Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b).$$

Exemple : $S = \mathbb{Z}_2$, $r(x, y) = (y + 1, x - 1)$, $r^2 = \text{Id}$, $r' = \text{twist}$,

$$\Gamma: \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle \xrightarrow{1:1} \mathbb{Z}^2.$$

Mauvaise nouvelle pour la topologie.

Bonne nouvelle pour l'étude des groupes de structure.

Un 1-cocycle de groupes bijectif

$$\Gamma: G \xrightarrow{1:1} G', \quad \Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b),$$

est la même chose ...

Un 1-cocycle de groupes bijectif

$$\Gamma: G \xrightarrow{1:1} G', \quad \Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b),$$

est la même chose que ... plein d'autres choses !

En particulier, une **skew brace** $(G, \cdot, +)$, i.e.,

- (G, \cdot) est un groupe ;
- $(G, +)$ est un groupe ;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b - a + a \cdot c$

Un 1-cocycle de groupes bijectif

$$\Gamma: G \xrightarrow{1:1} G', \quad \Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b),$$

est la même chose que ... plein d'autres choses !

En particulier, une **skew brace** $(G, \cdot, +)$, i.e.,

- (G, \cdot) est un groupe ;
- $(G, +)$ est un groupe ;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b - a + a \cdot c$

(Rump '07 pour $+$ commutatif, *Guarnieri, Vendramin '17* en général).

Un 1-cocycle de groupes bijectif

$$\Gamma: G \xrightarrow{1:1} G', \quad \Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b),$$

est la même chose que ... plein d'autres choses !

En particulier, une **skew brace** $(G, \cdot, +)$, i.e.,

- (G, \cdot) est un groupe ;
- $(G, +)$ est un groupe ;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b - a + a \cdot c$

(Rump '07 pour $+$ commutatif, *Guarnieri, Vendramin '17* en général).

Exemple : groupe $(G, \cdot) \rightsquigarrow$ **skew brace triviale** (G, \cdot, \cdot) .

Un 1-cocycle de groupes bijectif

$$\Gamma: G \xrightarrow{1:1} G', \quad \Gamma(ab) = \Gamma(a)^b \Gamma(b),$$

est la même chose que ... plein d'autres choses !

En particulier, une **skew brace** $(G, \cdot, +)$, i.e.,

- (G, \cdot) est un groupe ;
- $(G, +)$ est un groupe ;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b - a + a \cdot c$

(Rump '07 pour $+$ commutatif, *Guarnieri, Vendramin '17* en général).

Exemple : groupe $(G, \cdot) \rightsquigarrow$ **skew brace triviale** $(G, +, \cdot)$.

Liens avec

- ✓ la **théorie des anneaux** ;
- ✓ les **extensions de Hopf-Galois** (*Byott '15*).

Une skew brace $(G, \cdot, +)$:

- (G, \cdot) est un groupe ;
- $(G, +)$ est un groupe ;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b - a + a \cdot c$

Une skew brace $(G, \cdot, +)$:

- (G, \cdot) est un groupe ;
- $(G, +)$ est un groupe ;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b - a + a \cdot c$

Applications :

- ✓ Avancées dans la classification des solutions ensemblistes.

Une skew brace $(G, \cdot, +)$:

- (G, \cdot) est un groupe ;
- $(G, +)$ est un groupe ;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b - a + a \cdot c$

Applications :

- ✓ Avancées dans la classification des solutions ensemblistes.
- ✓ Foncteurs adjoints

Grp: Solutions \Leftrightarrow SkewBraces

Une **skew brace** $(G, \cdot, +)$:

- (G, \cdot) est un groupe ;
- $(G, +)$ est un groupe ;
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b - a + a \cdot c$

Applications :

- ✓ Avancées dans la classification des solutions ensemblistes.
- ✓ Foncteurs adjoints

Grp: Solutions \Leftrightarrow SkewBraces

À comparer :

Grp: Quandles \Leftrightarrow Groupes : Conj

Conj(G) = $(G, r(x, y) = (y, y^{-1}xy))$

Une *skew brace* $B = (G, \cdot, +)$.

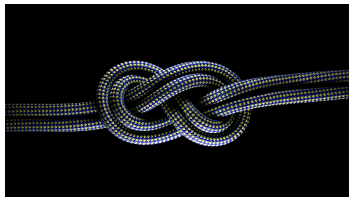
Applications :

✓ Câblage (*L., Ramirez, Vendramin, puis Colazzo, Van Antwerpen '24*) :

Proposition : pour n fixé,

$$B^{(n)} = \langle n\alpha, \alpha \in B \rangle_+$$

est une sous-skew brace de B .



Une *skew brace* $B = (G, \cdot, +)$.

Applications :

✓ *Câblage* (*L., Ramirez, Vendramin, puis Colazzo, Van Antwerpen '24*) :

Proposition : pour n fixé,

$$B^{(n)} = \langle n\mathbf{a}, \mathbf{a} \in B \rangle_+$$

est une sous-skew brace de B .

Théorème (*L., Vendramin '19*) : Pour (S, r) raisonnable et n bien choisi, $(\text{Grp}(S, r)^{(n)}, \cdot)$ est *abélien libre d'indice fini* dans $(\text{Grp}(S, r), \cdot)$.

Une *skew brace* $B = (G, \cdot, +)$.

Applications :

✓ *Câblage* (*L., Ramirez, Vendramin, puis Colazzo, Van Antwerpen '24*) :

Proposition : pour n fixé,

$$B^{(n)} = \langle n\mathbf{a}, \mathbf{a} \in B \rangle_+$$

est une sous-skew brace de B .

Théorème (*L., Vendramin '19*) : Pour (S, r) raisonnable et n bien choisi, $(\text{Grp}(S, r)^{(n)}, \cdot)$ est *abélien libre d'indice fini* dans $(\text{Grp}(S, r), \cdot)$.

À comparer : $S_n = B_n / \langle \sigma_i^2 \rangle$.

Une **skew brace** $B = (G, \cdot, +)$.

Applications :

✓ **Câblage** (*L., Ramirez, Vendramin, puis Colazzo, Van Antwerpen '24*) :

Proposition : pour n fixé,

$$B^{(n)} = \langle n\mathbf{a}, \mathbf{a} \in B \rangle_+$$

est une sous-skew brace de B .

Théorème (*L., Vendramin '19*) : Pour (S, r) raisonnable et n bien choisi, $(\text{Grp}(S, r)^{(n)}, \cdot)$ est **abélien libre d'indice fini** dans $(\text{Grp}(S, r), \cdot)$.

À comparer : $S_n = B_n / \langle \sigma_i^2 \rangle$.

Décrire $\text{Grp}(S, r)^{(n)}$ dans le langage des **groupes** de structure ?

Techniques combinatoires délicates même quand $r^2 = \text{Id}$ (*Dehornoy '15*).