Systèmes tressés : généralités & applications à la théorie de Hopf

Victoria LEBED
Séminaire d'algèbre
IHP, 05/11/2012

I. Motivations

$(H, \mu, \nu : \Bbbk \to H, \Delta, \varepsilon)$: bigèbre dans $\mathrm{vect}_\Bbbk$
$\qquad \alpha \mapsto \alpha \cdot 1 \qquad\qquad\qquad\qquad$ dim. finie

<u>Déf.</u> : • H-module de Hopf à droite-droite =
H-mod. à droite + H-comod. à droite + compatibilités
$(M, \rho : M \otimes H \to H)$ $\quad (\delta : M \to M \otimes H)$ $\quad$ δ est un morphisme dans Mod_H,
i.e. $\delta(m \cdot h) = m_0 h_1 \otimes m_1 h_2 \quad \forall m \in M, h \in H$

$\rightsquigarrow$ catégorie Mod_H^H

• ${}_H\mathrm{Mod}^H$ etc.

• H-bimodule de Hopf = H-bimod. + H-bicomod. + compatibilités
Nichols, Woronowicz $\qquad\qquad$ Mod_H^H, ${}_H\mathrm{Mod}^H$ etc.
1-formes dans le calcul diff. sur les groupes quantiques

$\rightsquigarrow$ catégorie ${}_H^H\mathrm{Mod}_H^H$

① Structure des Bimodules de Hopf

[A] Cibils-Rosso, 98 : "Hopf bimodules are modules"

<u>Th.</u> : $\boxed{{}^H_H\mathrm{Mod}^H_H \simeq \mathrm{Mod}_{\underbrace{\mathfrak{X}(H)}_{\text{algèbre}}}}$

⚠ Dans cet exposé, toutes les équivalences de catégorie préservent les e.v. (ou, plus généralement, les objets) sous-jacents. Il s'agit donc d'une équivalence de structure.

$$\mathfrak{X}(H) = \underbrace{(H^{*op}\otimes H^*)}_{\text{sous-algèbres}} \underline{\otimes} \underbrace{(H^{op}\otimes H)}$$

$$(\underset{H^{op}}{h}\otimes \underset{H}{g})\cdot(\underset{H^{*op}}{\ell}\otimes \underset{H^*}{k}) = \langle \ell_1, g_1\rangle\langle k_1, g_3\rangle\langle \ell_3, h_1\rangle\langle k_3, h_3\rangle\,(\ell_2\otimes k_2)\underline{\otimes}(h_2\otimes g_2)$$

<u>Prop.</u> : $\mathfrak{X}(H)$ est associative.

<u>Rmq</u> : on remplace la structure "compliquée" (bimod. de Hopf) par une structure "simple" (module) sur un objet "compliqué" (un produit tensoriel tordu).

<u>Applic^n</u> (Taillefer, 00) : comparaison des théories cohomologiques des bigèbres & bimodules de Hopf.

[B] Panaite, 02 : "— // — over a diagonal crossed product"

<u>Th.</u> : $\boxed{{}^H_H\mathrm{Mod}^H_H \simeq \mathrm{Mod}_{\mathcal{Y}(H)} \simeq \mathrm{Mod}_{\mathcal{Z}(H)}}$

$\mathfrak{X}(H)$

$\wr\wr$

$\mathcal{Y}(H) \simeq H \# (H^*\otimes H^{*op}) \# H^{op}$ (produit croisé (smash) bilatère)

$\wr\wr$

$\mathcal{Z}(H) \simeq (H^{op}\otimes H) \bowtie (H^*\otimes H^{*op})$ (produit croisé diagonal)

<u>Applic^n</u> : H semisimple & co-semisimple $\Rightarrow \mathcal{Z}(H)$ semisimple.

[C] L., 12 : "— // — over ~~2~~ 4 pairwise isomorphic algebras"

→ isomorphismes explicites
→ outils généraux

② Étude d'homologies

Prop.: $M \in {}^H_H\mathrm{Mod}^H_H \Rightarrow$ le complexe Bar de H à coefficients dans M est un complexe de bimodules de Hopf
(bimodule "périphérique", bicomodule diagonal)

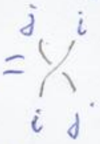
Applic^n : cohomologie des bigèbres (Gerstenhaber-Schack$_{90}$) et des bimodules de Hopf (Ospel$_{99}$, Taillefer$_{01}$)

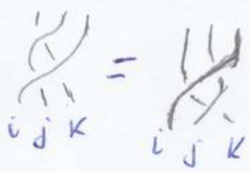
L.: explication conceptuelle de ce genre de phénomènes.

II. Systèmes tressés

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale stricte.

Déf.: Système tressé dans $\mathcal{C}$ = objets $V_1, \dots, V_r$ + morphismes $\sigma_{ij} : V_i \otimes V_j \to V_j \otimes V_i$ $\forall i \leq j$
+ YB (= relation de Yang-Baxter) sur $\forall V_i \otimes V_j \otimes V_k$, $1 \leq i \leq j \leq k \leq r$:
$(\sigma_{jk} \otimes Id_i) \circ (Id_j \otimes \sigma_{ik}) \circ (\sigma_{ij} \otimes Id_k) = (Id_k \otimes \sigma_{ij}) \circ (\sigma_{ik} \otimes Id_j) \circ (Id_i \otimes \sigma_{jk})$.

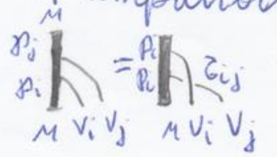
Graphiquement, • $\sigma_{ij} =$  $\uparrow$

- le brin i passe au-dessus du brin j $\Rightarrow i \leq j$
- YB $\Leftrightarrow$ 

Rmq: un tressage → positif (non-inversible),
→ partiel,
→ local.

Notation: $(\overline{V}, \overline{\sigma})$.

Déf.: $(\overline{V}, \overline{\sigma})$-module multi-tressé à droite = objet M + morphismes $\rho_i : M \otimes V_i \to M$ $\forall 1 \leq i \leq r$
+ compatibilité: $\rho_j \circ (\rho_i \otimes Id_j) = \rho_i \circ (\rho_j \otimes Id_i) \circ \sigma_{ij} : M \otimes V_i \otimes V_j \to M$ $\forall 1 \leq i \leq j \leq r$.



⇝ catégorie $\mathrm{Mod}_{(\overline{V}, \overline{\sigma})}$, ou $\mathrm{Mod}_{(V_1, \dots, V_r)}$

Ex. : (1) Algèbres associatives unitaires (= AAU).

$V \in Ob(\mathcal{C})$, $\mu : V \otimes V \to V$, $\nu : I \to V$
unité pour μ.

$r = 1$, $V_1 = V$, $\sigma_{11} = \nu \otimes \mu : V \otimes V = I \otimes V \otimes V \to V \otimes V =: \sigma_{Ass}(V)$.

Prop. : • YB pour $\sigma_{Ass}(V) \Leftrightarrow$ associativité pour μ.

• Soient (V, μ, ν) et (V', μ', ν') AAU dans $\mathcal{C}$, et $V \xrightarrow{f} V'$ un morphisme normalisé, i.e. $f \circ \nu = \nu'$. Alors f est un m-sme d'objets tressés
$\Updownarrow$
f est un m-sme d'AAU.

• Soit (V, μ, ν) une AAU dans $\mathcal{C}$. Alors
(M, ρ) est un (V, σ_{Ass})-module normalisé, i.e. $\rho \circ (Id_M \otimes \nu) = Id_M$
$\Updownarrow$
(M, ρ) est un module sur l'algèbre (V, μ, ν).

la catégorie des objets tressés V dans $\mathcal{C}$ munis d'un $\nu \in Mor_{\mathcal{C}}(I, V)$

$\boxed{AAU(\mathcal{C}) \hookrightarrow T^*(\mathcal{C})}$

$(V, \mu, \nu) \mapsto (V, \sigma_{Ass}, \nu)$,
$f \mapsto f$
sous-catégorie pleine

$\boxed{Mod^*_{(V, \sigma_{Ass})} \simeq Mod_V}$

modules normalisés — AAU

(2) Bimodules

soit (V, μ, ν) une AAU das une catégorie symétrique $\mathcal{C}$.

Prop. : • $r = 2$, $V_1 = V$, $V_2 = V^{op} := (V, \mu \circ c_{V,V}, \nu)$
$\sigma_{11} = \sigma_{Ass}(V)$, $\sigma_{22} = \sigma_{Ass}(V^{op})$, $\sigma_{12} = c_{V,V}$ $\}$ un système tressé, i.e.

$\boxed{AAU(\mathcal{C}) \hookrightarrow SystTr_2^*(\mathcal{C})}$

$(V, \mu, \nu) \mapsto (V, V^{op}; \sigma_{Ass}(V), \sigma_{Ass}(V^{op}), \sigma_{12} = c_{V,V})$
$f \mapsto (f, f)$
sous-catégorie pleine

• $\boxed{Mod^*_{(V, V^{op})} \simeq {}_V Mod_V}$

Prop. (Permutation des facteurs) : Soit $(\overline{V}, \overline{\sigma})$ un système tressé, avec un des $\sigma_{i,i+1}$ inversible. Alors :

- On a un système tressé $\tau_i(\overline{V}, \overline{\sigma}) := (V_1, \dots, V_{i+1}, V_i, \dots, V_r ; \sigma_{kj} = \begin{cases} \text{ancien } \sigma_{kj} \text{ sur } V_k \otimes V_j \text{ si } (k,j) \neq (i+1,i) \\ \text{ancien } \sigma_{i,i+1}^{-1} \text{ sur } V_{i+1} \otimes V_i \end{cases})$
- $\boxed{Mod_{(\overline{V},\overline{\sigma})} \simeq Mod_{\tau_i(\overline{V},\overline{\sigma})}}$

Rmq. On obtient une action partielle des groupes symétriques S_r sur les systèmes tressés

Ex. : ③ Bigèbres

$\mathcal{C} = vect_k$.

Ob = bigèbres,
Mor = isom-smes de bigèbres

systèmes tressés à 2 composants

Prop. • $\boxed{Big \hookrightarrow SystTr_2}$

$$(H, \mu, \nu, \Delta, \varepsilon) \longmapsto (H, H^* ; \underbrace{\sigma_{Ass}(H)}_{\mu \otimes \nu}, \sigma_{Ass}(H^*), \underbrace{\sigma_{bi}}_{\tau \circ (Id_H \otimes ev \otimes Id_{H^*}) \circ (\Delta \otimes \mu^*) :\ h \otimes l \mapsto \langle l_1, h_2 \rangle l_2 \otimes h_1}) =: \overline{H}_{bi}$$

$$f \longmapsto (f, (f^{-1})^*).$$

- $\boxed{Mod^*_{\overline{H}_{bi}} \simeq Mod^H_H}$
- σ_{bi} est inversible $\Leftrightarrow$ H est une algèbre de Hopf ;
  dans ce cas $\rightarrow \sigma_{bi}^{-1} : l \otimes h \mapsto \langle l_1, S(h_2) \rangle h_1 \otimes l_2$,
  $\rightarrow Mod^*_{\overline{H}_{bi}} \simeq Mod^*_{(H^*, H ; \sigma_{Ass}(H^*), \sigma'_{Ass}(H), \sigma_{bi}^{-1})}$.

Rmq. : → pas une sous-catégorie pleine en général ;
→ YB sur $H \otimes H^* \otimes H^* \Leftrightarrow$ YB sur $H \otimes H \otimes H^* \Leftrightarrow$ H est une bigèbre : $\Delta(hg) = h_1 g_1 \otimes h_2 g_2$ $\forall h, g \in H$.

III Produit tensoriel multi-tressé d'algèbres.

Th : Soient $(V_i, \mu_i, \nu_i)_{1 \le i \le r}$ des AAU dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$, munies des morphismes $\sigma_{ij} : V_i \otimes V_j \to V_j \otimes V_i$ $\forall i<j$ qui respectent les unités:
$\to \sigma_{i,j} \circ (Id_i \otimes \nu_j) = \nu_j \otimes Id_i$,
$\to \sigma_{ij} \circ (\nu_i \otimes Id_j) = Id_j \otimes \nu_i$.

- $(V_1, .., V_r; \sigma_{ij}, \sigma_{ii} := \sigma_{Ass}(V_i))$ est un système tressé $\Leftrightarrow$ ($\overleftarrow{V} := V_r \otimes .. \otimes V_1$, $\overleftarrow{\mu} := (\mu_r \otimes .. \otimes \mu_1) \circ (\quad)$, $\overleftarrow{\nu} := \nu_r \otimes .. \otimes \nu_1$) est une AAU.
  ⚠ l'ordre inverse!
- Dans ce cas, $\boxed{Mod^*_{(\overline{V}, \overline{\sigma})} \simeq Mod_{\overleftarrow{V}}}$.
- Si un des $\sigma_{i,i+1}$ est inversible, alors
  $\to$ $\boxed{\overleftarrow{V} \xrightarrow{\sigma_{i,i+1}^{-1}} \tau_i \overleftarrow{V}} := V_r \otimes .. \otimes V_i \otimes V_{i+1} \otimes .. \otimes V_1$ (l'AAU correspondant au système tressé $\tau_i(\overline{V}, \overline{\sigma})$),
  $\to$ $\boxed{Mod_{\overleftarrow{V}}} \simeq Mod^*_{(\overline{V}, \overline{\sigma})} \simeq Mod^*_{\tau_i(\overline{V}, \overline{\sigma})} \simeq \boxed{Mod_{\tau_i \overleftarrow{V}}}$
  $\rho \circ (Id_M \otimes \sigma_{i,i+1}^{-1}) \longleftarrow \rho$

Rmq : $\to$ on peut remplacer un/plusieurs $\sigma_{i,i} = \sigma_{Ass}$ par σ'_{Ass} ;
$\to$ on retrouve les produits tensoriels tordus itérés de Martinez, Peña, Panaite, van Oystaeyen ('08) ;
$\to$ on a une action partielle des S_r sur les produits tens. multi-tressés d'algèbres.

Ex : ② ${}_V Mod_V \simeq Mod^*(V, V^{op}) \simeq Mod_{V^{op} \otimes V}$
$\simeq Mod^*(V^{op}, V) \simeq Mod_{V \otimes V^{op}} = V^e$
l'algèbre enveloppante de V

③ $Mod^H_H \simeq Mod^*_{(H, H^*; \sigma_{Bi})} \simeq Mod_{H^* \underset{\sigma_{Bi}}{\otimes} H}$
si H est une algèbre de Hopf $\nearrow \simeq Mod^*_{(H^*, H; \sigma_{Bi}^{-1})} \simeq Mod_{H \underset{\sigma_{Bi}^{-1}}{\otimes} H^*} = \mathcal{H}(H)$
double de Heisenberg de H.

(4) Bimodules de Hopf

Prop.: • $\boxed{\mathrm{Big} \hookrightarrow \mathrm{Syst\,Tr}_4}$

$(H,\mu,\nu,\Delta,\varepsilon) \longmapsto (H, H^{op}, H^*, H^{*op};\ \sigma_{ii}=\sigma_{Ass}, \sigma_{12}=\overset{flip}{\tau}, \sigma_{34}=\tau, \sigma_{13}=\sigma_{Bi}(H),$
$\sigma_{23}=\sigma_{Bi}(H^{op}), \sigma_{14}=\sigma_{Bi}(H^{cop}), \sigma_{24}=\sigma_{Bi}(H^{op,cop}))$

$\overset{!!}{F_4}$

$f \longmapsto (f, f, (f^{-1})^*, (f^{-1})^*)$.

• $\boxed{{}^H_H\mathrm{Mod}^H_H \simeq \mathrm{Mod}^*_{F_4} \simeq \mathrm{Mod}_{(H^{*op}\otimes H^*)\underline{\otimes}(H^{op}\otimes H)} = X(H)}$

• Si H est une algèbre de Hopf, alors $\forall s \in S_4$ on a

$\boxed{\begin{array}{l} X(H) \overset{\text{iso explicite}}{\underset{AAU}{\simeq}} sX(H) \\ \mathrm{Mod}_{X(H)} \simeq \mathrm{Mod}_{sX(H)} \end{array}}$ compatibles

Preuve: i) $\mathrm{Mod}^H_H \rightsquigarrow {}_H\mathrm{Mod}^H$ etc.

$H \rightsquigarrow H^{op}$

ii) combiner i) avec ${}_H\mathrm{Mod}_H$ et son dual (dans le sense catégorique) ${}^H\mathrm{Mod}^H$.

Rmq: → on retrouve $Y(H)$ & $Z(H)$ parmis les $\# S_4 = 4! = 24$ algèbres de la forme $sX(H)$.

(5) Modules de Yetter-Drinfel'd

a) Comme coefficients: → doubles de Drinfel'd.

b) Comme éléments d'un système tressé $(H, M_1, \ldots, M_t, H^*)$
→ structures tensorielles sur ${}_H\mathcal{YD}^H$;
→ théories homologiques.

(6) Produits croisés (smash)

IV Théorie homologique

Soient → $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale additive

→ $(\bar{V}, \bar{\sigma})$ un système tressé dans $\mathcal{C}$

$\bar{V}^{n}_{\rightarrow} := \bigoplus_{k_1+\dots+k_r=n} V_1^{\otimes k_1} \otimes \dots \otimes V_r^{\otimes k_r}$ (produits tensoriels ordonnés)

→ $(M, \bar{\rho})$ et $(N, \bar{\lambda})$ des $(\bar{V}, \bar{\sigma})$-modules multi-tressées à droite (resp. à gauche)

Th.: La famille $(M \otimes \bar{V}^{n}_{\rightarrow} \otimes N)_{n \geq 0}$ d'objets de $\mathcal{C}$ peut être munie de la structure pré-bisimpliciale suivante:

$({}^{\rho}d)_{n,i} := (\rho \otimes Id_{\bar{V}^{n-1}_{\rightarrow}} \otimes Id_N) \circ (Id_M \otimes \underset{1 \dots i \dots n}{} \otimes Id_N)$,

$(d^{\lambda})_{n,i} := (Id_M \otimes Id_{\bar{V}^{n-1}_{\rightarrow}} \otimes \lambda) \circ (Id_M \otimes \underset{1 \dots i \dots n}{} \otimes Id_N)$.

Cor: $({}^{\rho}d_n := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} ({}^{\rho}d)_{n,i}\,,\; d^{\lambda}_n := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} (d^{\lambda})_{n,i})$ est une bidifférentielle.

Preuve: calcul graphique.

Rmq: → ${}^{\rho}d_n = (\rho \otimes Id \dots) \circ \underline{\amalg\!\amalg}_{-\bar{\sigma}}^{1,n-1}$, $d^{\lambda}_n = (Id \dots \otimes \lambda) \circ \underline{\amalg\!\amalg}_{-\bar{\sigma}}^{n-1,1}$,

module multi-tressé à droite: $\rho \circ (\rho \otimes Id_V) \circ \underline{\amalg\!\amalg}_{-\bar{\sigma}}^{1,1} = 0$

→ Un coproduit coassociatif co-commutatif multi-tressé enrichit cette structure pour en faire une structure faiblement bisimpliciale.

$\underline{\amalg\!\amalg}_{-\bar{\sigma}}$ est un coproduit coassociatif
\+
$\bar{\rho}$ est un "co-élément de carré zéro"
⇓
"la comultiplication par ρ" est une differentielle

Ex.: (1) bar, Hochschild

(3) Gerstenhaber-Schack (90), Panaite-Ştefan (02)

Prop.: Dans le cadre du thm précédant, fixons un $1 \leq s \leq r$.

- $M \otimes V_1^{\otimes k_1} \otimes \dots \otimes V_s^{\otimes k_s}$ est un $(V_s, V_{s+1}, \dots, V_r; \bar{\sigma})$-module multi-tressé à droite, avec $\pi_i := (\rho_i \otimes Id \dots) \circ (\underset{1 \dots k_1+\dots+k_s \; V_i}{})$.
- $(M \otimes \bar{V}^{n}_{1 \to s}, {}^{\rho}d)$ devient un complexe de $(V_s, \dots, V_r; \bar{\sigma})$-modules multi-tressés.

Ex.: (4) $\mathcal{C} = vect_{\mathbb{k}}$, H: bigèbre, $M \in {}^{H}_{H}Mod^{H}_{M}$ $\overset{s=1}{\Longrightarrow}$ $(M \otimes T(H), d_{bar})$ est un complexe de $\bar{H}_4$-mod. multi-tressés à droite, i.e. un complexe de bimodules de Hopf, avec → les actions "périphérique",
→ les coactions diagonales.