

# HOMOLOGIES DES STRUCTURES ALGÈBRIQUES : APPROCHE UNIFICATRICE VIA TRESSAGES

**Victoria LEBED**

IMJ, Paris 7

lebed@math.jussieu.fr

**Résumé** - *On introduit une théorie homologique des espaces vectoriels tressés et on montre comment voir les homologies des différentes structures algébriques familières à l'aide de cette approche unificatrice. On présente en détail l'exemple de la structure d'algèbre associative, et on fournit des tressages qui encodent quelques autres structures algébriques.*

**Mots clés** - Algèbre homologique, tressage, algèbres de battage quantiques, modules bi-simpliciaux, calcul graphique, homologie de Hochschild, homologie de Chevalley-Eilenberg, structures auto-distributives, algèbres de Leibniz

## 1 Introduction

Dans cet exposé, on s'intéresse à un procédé qu'on rencontre très souvent en mathématiques, schématiquement présenté comme suit :

structure algébrique $\longmapsto$ homologie.
---

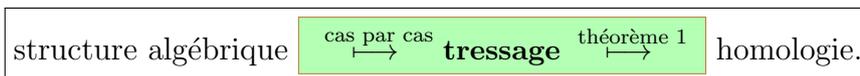
Le choix d'une théorie homologique pour une structure algébrique donnée peut avoir des motivations très variées : on peut vouloir étudier les déformations de la structure en question, ou généraliser une homologie provenant d'un cadre géométrique, ou classifier des structures, ou obtenir des invariants (des nœuds par exemple) à l'aide des (co)cycles. Les exemples de base sont pour nous les suivantes :

1. complexe de Koszul pour un espace vectoriel (= e.v.);
2. complexe bar et complexe de Hochschild pour une algèbre associative;
3. complexe de Chevalley-Eilenberg pour une algèbre de Lie;
4. complexes de rack et de quandle pour des structures auto-distributives.

Les complexes ci-dessus ont tous la même allure : c'est une algèbre tensorielle (ou extérieure dans le cas des algèbres de Lie) avec comme différentielle sur  $V^{\otimes n}$  une somme de type  $d = \sum_{i=1}^n (-1)^i \partial_{n,i}$ , où les  $\partial_{n,i}$  sont construites en utilisant seulement la structure algébrique de départ et correspondent au même procédé appliqué dans des positions  $i$  différentes. La vérification de l'identité  $d \circ d = 0$  est effectuée à partir de deux ingrédients :

1. les propriétés définissant la structure algébrique (e.g. l'associativité pour une algèbre associative);
2. un jeu de signes parfois mystérieux (surtout pour le complexe de Chevalley-Eilenberg).

Il y a beaucoup d'autres phénomènes qui suggèrent l'existence d'une approche commune à toutes ces théories homologiques. Dans [12] par exemple, J.Przytycki développe la théorie homologique des structures auto-distributives en s'inspirant de celle des structures associatives. Dans cet exposé on propose une telle approche unificatrice, présentée en détail dans [8]. Elle apporte une lumière nouvelle sur, entre autres, les parallèles observés par J.Przytycki. Notre approche consiste à rajouter une étape au schéma précédent :



Dans la première partie de l'exposé on rappellera la notion des e.v. tressés et on présentera leur théorie homologique, introduite dans [8]. Dans la deuxième partie on introduira et étudiera en détail le tressage qui encode la structure d'une algèbre associative. On finira par une liste de tressages pour d'autres structures algébriques.

## 2 Homologie des espaces vectoriels tressés

**Définition 2.1.** Un *espace vectoriel tressé* est un  $\mathbb{k}$ -e.v.  $V$  muni d'un *tressage*, i.e. d'une application linéaire  $\sigma : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  qui satisfait *l'équation de Yang-Baxter*

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 : V \otimes V \otimes V \rightarrow V \otimes V \otimes V, \quad (\text{YB})$$

où  $\sigma_i$  est le tressage  $\sigma$  appliqué aux composantes  $i$  et  $i + 1$  de  $V^{\otimes 3}$ .

Contrairement à la majorité des auteurs, on ne demande pas que  $\sigma$  soit inversible ; notamment, le tressage qu'on proposera pour les algèbres associatives ne le sera pas.

**Définition 2.2.** Deux co-éléments  $f, g \in V^*$  sont dits  *$\sigma$ -compatibles* si

$$(f \otimes g) \circ \sigma = g \otimes f, \quad \text{et} \quad (g \otimes f) \circ \sigma = f \otimes g.$$

Un *caractère tressé* est un  $\epsilon \in V^*$  auto- $\sigma$ -compatible, i.e.

$$(\epsilon \otimes \epsilon) \circ \sigma = \epsilon \otimes \epsilon.$$

Un tressage et un caractère tressé sur  $V$  s'avèrent suffisants pour définir une théorie homologique pour  $V$  :

**Théorème 1.** Soit  $(V, \sigma)$  un e.v. tressé muni de deux caractères tressés  $\epsilon$  et  $\zeta$ . Alors on dispose d'une bi-différentielle sur  $T(V)$  définie par les formules

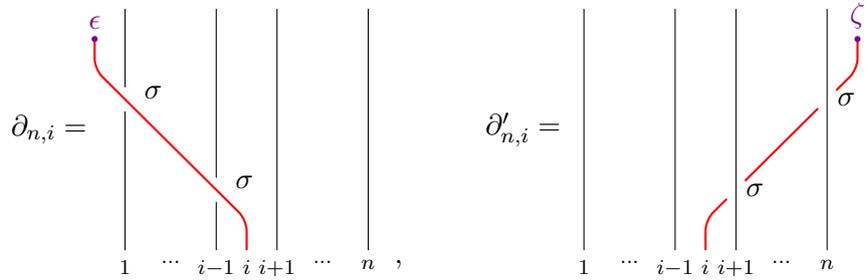
$$\begin{aligned}
 & V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes(n-1)} \\
 \epsilon d : \bar{v} & \longmapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \partial_{n,i}(\bar{v}), & \partial_{n,i} & := (\epsilon \otimes \text{Id}_{n-1}) \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_{i-1}, \\
 d^\zeta : \bar{v} & \longmapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \partial'_{n,i}(\bar{v}), & \partial'_{n,i} & := (\text{Id}_{n-1} \otimes \zeta) \circ \sigma_{n-1} \circ \sigma_{n-2} \circ \dots \circ \sigma_i.
 \end{aligned}$$

De plus, si les caractères  $\epsilon$  et  $\zeta$  sont  $\sigma$ -compatibles, alors les paires  $(\epsilon d, \zeta d)$  et  $(d^\epsilon, d^\zeta)$  deviennent également bi-différentielles sur  $T(V)$ .

On donne brièvement les idées de deux preuves de ce théorème. On présente ainsi deux façons de traiter nos bi-différentielles “tressées”, chacune apportant des éclairages sur leur nature :

approche	avantages
graphique : diagrammes, tressés	→maniabilité, →structure bisimpliciale ;
battages quantiques et co-éléments de carré nul : $\mathcal{d} = (\epsilon \otimes \text{Id}_{n-1}) \circ \underline{\square}_{-\sigma}^{1,n-1} \quad \& \quad (\epsilon \otimes \epsilon) \circ \underline{\square}_{-\sigma} = 0$ & co-associativité de $\underline{\square}_{-\sigma} \Rightarrow \mathcal{d} \circ \mathcal{d} = 0$	→on “cache” le jeu de signes dans $-\sigma$ , →plus besoin de contrôler les indices $i$ , →on travaille au niveau “global”.

L’approche graphique consiste à travailler avec les diagrammes du type suivant (ici on lit un diagramme du bas en haut, et on compose consécutivement tous les morphismes qu’on rencontre ; un brin vertical correspond à l’application identité) :



En plus d’être facilement maniables, ces diagrammes suggèrent une structure pré-bisimpliciale sur  $T(V)$ , qui peut être complétée en une structure faiblement simpliciale (cf. [9] et [12]) si  $V$  possède en plus une “bonne” comultiplication  $\Delta$  (i.e. co-associative,  $\sigma$ -cocommutative et compatible avec le tressage  $\sigma$ ) ; en effet, on peut prendre comme dégénérescences

$$s_i := \text{Id}_{i-1} \otimes \Delta \otimes \text{Id}_{n-i} . \tag{s_i}$$

Pour plus de détails sur les algèbres de battages (=shuffle) quantiques, voir les travaux de M.Rosso ([13],[14]).

Notons que notre théorème donne plus qu’une simple homologie : en fait, elle associe à chaque caractère tressé deux différentielles compatibles, précisant aussi les conditions de compatibilité de ces différentielles pour des caractères différents.

On retrouve comme cas particulier les constructions de J.S.Carter, M.Elhamedi et M.Saito, cf. [1].

### 3 Exemples

Soit  $V$  un  $\mathbb{k}$ -e.v. muni d’une application bilinéaire  $\mu : V \otimes V \longrightarrow V$  et d’un élément distingué  $\mathbf{1} \in V$ . On introduit une application bilinéaire

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma_\mu : V \otimes V &\longrightarrow V \otimes V, \\ v \otimes w &\longmapsto \mathbf{1} \otimes \mu(v \otimes w) \end{aligned}$$

**Proposition 3.1.** *Supposons que  $\mathbf{1}$  est un élément neutre pour  $\mu$ . Alors l'application  $\sigma_\mu$  est un tressage si et seulement si  $\mu$  est associative sur  $V$ .*

On a ainsi obtenu un tressage qui encode la propriété algébrique “associativité”. Remarquons que ce tressage est loin d’être inversible.

Le lemme suivant explique le choix du terme *caractère tressé* :

**Lemme 3.2.** Soit  $(V, \mu, \mathbf{1})$  une algèbre associative unitaire munie d’un *caractère*  $\epsilon$ , i.e. une application  $\epsilon : V \rightarrow \mathbb{k}$  qui respecte la structure d’algèbre :

$$\begin{aligned}\epsilon(\mu(v \otimes w)) &= \epsilon(v)\epsilon(w) \quad \forall v, w \in V, \\ \epsilon(\mathbf{1}) &= 1.\end{aligned}$$

Alors  $\epsilon$  est un caractère tressé pour l’e.v. tressé  $(V, \sigma_\mu)$ .

On a ainsi tous les ingrédients nécessaires pour appliquer le théorème 1. Étant donné deux caractères  $\epsilon$  et  $\zeta$  d’une algèbre associative unitaire  $(V, \mu, \mathbf{1})$ , ce théorème donne la bi-différentielle suivante sur  $T(V)$  :

$$\begin{aligned}{}^\epsilon d(v_1 \dots v_n) &= \epsilon(v_1)v_2 \dots v_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i v_1 \dots v_{i-1} \mu(v_i \otimes v_{i+1}) v_{i+2} \dots v_n, \\ d^\zeta(v_1 \dots v_n) &= (-1)^{n-1} \zeta(v_n) v_1 \dots v_{n-1} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \zeta(v_{i+1}) \dots \zeta(v_n) v_1 \dots v_i \mathbf{1} \dots \mathbf{1}.\end{aligned}$$

L’algèbre  $V$  possède également une comultiplication (assez exotique)

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{1}} : V &\longrightarrow V \otimes V, \\ v &\longmapsto \mathbf{1} \otimes v.\end{aligned}$$

Cette comultiplication satisfait à toutes les propriétés décrites dans la section précédente et donne ainsi les dégénérescences  $(s_i)$ , d’où le *sous-bicomplexe dégénéré* qui est dans ce cas l’idéal de  $T(V)$  engendré par  $\mathbf{1}$ . Le passage au quotient donne le *bicomplexe normalisé* et en particulier la différentielle

$$\begin{aligned}({}^\epsilon d - d^\zeta)(v_1 \dots v_n) &= \epsilon(v_1)v_2 \dots v_n \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i v_1 \dots v_{i-1} \mu(v_i \otimes v_{i+1}) v_{i+2} \dots v_n, \\ &\quad + (-1)^n \zeta(v_n) v_1 \dots v_{n-1}\end{aligned}$$

sur  $T(V/\mathbb{k}\mathbf{1})$ . On reconnaît le *complexe de Hochschild* avec des coefficients triviaux (cf. par exemple [9]).

On termine avec un tableau des tressages, caractères tressés, co-multiplications compatibles  $\Delta$ , et exemples de complexes retrouvés pour d’autres structures algébriques. Quelques rappels sont nécessaires pour cela.

L'algèbre de Leibniz est une version non-anticommutative d'algèbre de Lie, introduite par J.L.Loday dans le but de relever la différentielle  $d_{CE}$  de Chevalley-Eilenberg sur  $\Lambda(V)$  en une différentielle sur  $T(V)$  (cf. [9] et [4]). Concrètement, c'est un e.v.  $V$  muni d'un crochet bilinéaire  $[\cdot, \cdot]$  qui satisfait à la version suivante de l'identité de Jacobi :

$$[v, [w, u]] = [[v, w], u] - [[v, u], w] \quad \forall v, w, u \in V.$$

Nos méthodes "tressées" permettent de retrouver la notion d'algèbre de Leibniz en expliquant notamment ce choix de version de l'identité de Jacobi parmi toutes les versions possibles (équivalentes dans le cas des algèbres de Lie à cause de l'anticommutativité), et donnent automatiquement le bon relèvement de  $d_{CE}$ .

Une opération  $\triangleleft$  sur un ensemble  $S$  est dite *auto-distributive* (= AD) si

$$(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft (b \triangleleft c) \quad \forall a, b, c \in S.$$

On obtient les notions de *rack* et de *quandle* en ajoutant des conditions supplémentaires. Ces structures sont importantes en topologie (cf. par exemple [6]), et leur homologies sont très fructueusement utilisées dans la construction d'invariants des nœuds.

structure	tressage	caractères tressés	$\Delta$	complexes
e.v. $V$	$v \otimes w \mapsto w \otimes v$	tout $\epsilon \in V^*$	–	Koszul
alg. de Leibniz/ Lie unitaire ( $V, [\cdot, \cdot], \mathbf{1}$ )	$\sigma_{[\cdot, \cdot]} :$ $v \otimes w \mapsto w \otimes v$ $+ \mathbf{1} \otimes [v, w]$	caractère de Lie $\epsilon :$ $\epsilon([v, w]) = 0,$ $\epsilon(\mathbf{1}) = 1$	$\Delta(v) =$ $v \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes v,$ $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$	Leibniz, Chevalley- Eilenberg
ensemble AD ( $S, \triangleleft$ )	$\sigma_{\triangleleft} :$ $S \times S \rightarrow S \times S$ $(a, b) \mapsto (b, a \triangleleft b)$	caractère AD $\epsilon :$ $\epsilon(a \triangleleft b) = \epsilon(a)$	$\Delta(a) =$ $(a, a)$	complexes de rack ([5]) & de quandle ([2])

## 4 Aller plus loin

On termine par quelques généralisations des outils et résultats présentés ci-dessus :

1. Toutes les constructions se transportent facilement dans le cadre des catégories (pré-additives) monoïdales. Entre autres, cela donne deux nouvelles constructions :
  - (a) des cohomologies des objets tressés ;
  - (b) des super-versions de certaines (co)homologies.
2. On peut construire des théories homologiques des objets tressés aux coefficients dans des *modules tressés* (introduits dans [8]).
3. La notion de *système tressé* ([7]), i.e. un tressage "partiel" et "local" sur une collection finie d'objets, permet de traiter les structures suivantes (ainsi que leurs homologies) :
  - (a) bigèbres, algèbres de Hopf ;
  - (b) (bi)modules de Hopf ;
  - (c) modules de Yetter-Drinfel'd.

Les techniques “tressées” s’avèrent également efficaces dans la présentation de bimodules, (bi)modules de Hopf et modules de Yetter-Drinfel’d en tant que modules sur des algèbres, dans l’esprit de [3] et [11].

4. Les *hyper-bords* de Loday de degré  $p$  ont une interprétation naturelle via les composants  $\coprod_{-\sigma}^{p, n-p}$  du coproduit de battage quantique.
5. On retrouve le calcul différentiel tressé de S.Majid ([10]) en travaillant avec des  $\epsilon$  arbitraires au lieu de se restreindre aux caractères tressés.

## Références

- [1] J. Scott Carter, Mohamed Elhamdadi, and Masahico Saito. Homology theory for the set-theoretic Yang-Baxter equation and knot invariants from generalizations of quandles. *Fund. Math.*, 184 :31–54, 2004.
- [2] J. Scott Carter, Daniel Jelsovsky, Seiichi Kamada, Laurel Langford, and Masahico Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(10) :3947–3989, 2003.
- [3] Claude Cibils and Marc Rosso. Hopf bimodules are modules. *J. Pure Appl. Algebra*, 128(3) :225–231, 1998.
- [4] Christian Cuvier. Homologie de Leibniz et homologie de Hochschild. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(9) :569–572, 1991.
- [5] Roger Fenn, Colin Rourke, and Brian Sanderson. Trunks and classifying spaces. *Appl. Categ. Structures*, 3(4) :321–356, 1995.
- [6] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, 23(1) :37–65, 1982.
- [7] Victoria Lebed. *Braided Objects : Unifying Algebraic Structures and Categorifying Virtual Braids*. 2012. Thesis (Ph.D.)—Université Paris 7.
- [8] Victoria Lebed. Homologies of Algebraic Structures via Braidings and Quantum Shuffles. *ArXiv e-prints*, April 2012.
- [9] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Appendix E by María O. Ronco.
- [10] S. Majid. Free braided differential calculus, braided binomial theorem, and the braided exponential map. *J. Math. Phys.*, 34(10) :4843–4856, 1993.
- [11] Florin Panaite. Hopf bimodules are modules over a diagonal crossed product algebra. *Comm. Algebra*, 30(8) :4049–4058, 2002.
- [12] Józef H. Przytycki. Distributivity versus associativity in the homology theory of algebraic structures. *Demonstratio Math.*, 44(4) :823–869, 2011.
- [13] Marc Rosso. Groupes quantiques et algèbres de battage quantiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(2) :145–148, 1995.
- [14] Marc Rosso. Integrals of vertex operators and quantum shuffles. *Lett. Math. Phys.*, 41(2) :161–168, 1997.